جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

نظرية فضاء باناخ
وتطبيقها في الميكانيك الإحصائي

رسالة أعدت لنيل درجة الماجستير في التحليل الرياضي

تقديم الطالب

حسّان عمار

إشراف

أ.م. د. عصام العبد الرزاق
أ.د. حميد عويّد العكله

بيان بإجراء التعديلات

قام الطالب حسان عمار بتصحيح الملاحظات التي وردت في متن رسالة الماجستير والتي أشار إليها السادة الدكاترة أعضاء لجنة الحكم خلال مناقشة الرسالة .

لجنة الحكم

د.عصام العبد الرزاق　　　د.محمد نور شمه　　　أ.د. هيثم فرح

رئيس قسم الرياضيات
د.عصام ديبان

الفهرس

الفصل الثالث: تطبيقات في الميكانيك الإحصائي

المقدّمة:

لقد دأب الإنسان ومنذ القدم على معرفة كل ما يحيط به حيث بدأ بالأشـياء التي تحيط به بشكل مباشر، وقام بمحاولات جادة لتطويعها (مثـل التعامـل مـع الحيوانات والنباتات) بناء على خواصها الظاهرية التي استكشفها، وبعد ذلك انتقل إلى معالجة مسائل أكثر تعقيداً منها تلك الأشياء التي من الصعب إدراكها مباشـرة (مثلاً محاولة فهم بعض الأمراض والأسباب التي أدت إليها) فكانت مـن نتـائج دراسته وأبحاثه أن ابتكر المجهر ومن ثم التعرف على البكتيريا المسببة للعديد من الأمراض.

بعد ذلك بدأ الإنسان بالبحث في التعرف على بنية المادة وكشف أسـرارها حيث توصل بعد دراسات كثيرة وعلى يد عدد كبير من العلماء إلى التعرف على البنية الذرية للمادة. بعد ما تعرف الإنسان على البنية الذرية للمادة في بداية القرن العشرين بدء في البحث من أجل إعطاء وصوفات كمية لخواص المادة في المجال الميكروسكوبي (المجهري)، وذلك من خلال التفاعلات الجارية داخل البنية الذرية للمادة، ومن هنا نشأت بعض المسائل الأساسية والهامة في الفيزياء الحديثة منهـا على سبيل المثال مسألة التعرف على توزيع الموضع للجسيمات وقانون الـسرعة لهذه الجسيمات و ... الخ.

في هذا الإطار قام الميكانيك الإحصائي Statistical Mechanics في البداية بتقديم حلول جزئية لمثل هذه المسائل المتعلقة ببنية الذرة وذلك من خلال تركيـب قوانين الحركة للميكانيك التقليدي Quantum Mechanics Classical Mechanics، وبذلك يكون الميكانيك الإحصائي قد احتل مركزاً متقدماً في مجال الفيزياء النظرية Theoretical Physics، والذي يتبنى بالدرجة الأولى الميكانيك التقليدي والكوانتي معاً لشرح ظواهر الحركة في بنية المادة، وهذا بدوره أدى إلى فهم أفضل لمفهوم الحرارية (الترمودينامك) Thermodenamic (انظر [3] و [5])).

في الواقع إن الحل التام للمسائل المطروحة بشأن بنية المادة يتطلب نظرية يمكنها تعيين سلوك الأنظمة الفيزيائية الماكروسـكوبية Macroscopic (ولـيس الميكروسكوبية Microscopic فقط) لدى تغيرات زمنية كيفية لحالات هذه الأنظمة. ولكن لفهم أكبر لابد لنا من العودة إلى الجذور التاريخية لهذه المـسألة، ومعرفـة كيف تطور هذا العلم الهام .

لقد قمنا بتوزيع عملنا هذا على ثلاثة فصول، حيث تضمن الفـصل الأول تقديماً متدرجاً لأهم التعاريف والمفاهيم التي سيحتاجها هذا البحث . أمـا الفـصل الثاني والذي يكون الجزء الرئيس للعمل فقد احتوى على تقـديم لجبـور بانـاخ والجبور C^*-**algebra**، ومن ثم إظهار بعض النتائج الهامة المستخدمة في مجـال الميكانيك الإحصائي. أخيراً جاء الفصل الثالث ليظهر لنـا بعـض اسـتخدامات الجبور C^*-**algebra** ، حيث بينت كيفيـة تطبيـق الجبـور C^*-**algebra** علـى الحالات المتوازنة equilibrium states لأنظمة الجسيمات التي يعبر عنها بقـانون جيبس الكبير.

إن عملي المقدم من خلال هذه الرسالة هو بمثابة لبنة بسيطة ومتواضـعة في مجال تزويد المكتبة العربية ببعض الدراسات التي اسـتخدمت فيهـا جبـور المؤثرات (وعلى وجه الخصوص الجبور C^*-**algebra**) في مجال الميكانيك الإحصائي.

آمل أن أكون قد قدمت ما هو مفيد والله ولي التوفيق.   حسان عمار

دراسة مرجعية : انظر [3]

في أواخر ١٩٢٤ وبداية ١٩٢٥ قدم كل من هايزنبرغ Heisenberg و شرودينغر Schrodinger وبشكل مستقل كل منهما عن الآخر اقتـراحين متكـافئين (لهمـا المدلول نفسه، بالرغم من التباين في أسلوب العرض) بخصوص تفسيرات قوانين التكميم التجريبي empirical quantization rules التي اقترحها كل من بور Bohr و سومرفيلد Sommerfeld في فترة سابقة، وهذه القوانين كانت قد طورت كـأداة مساعدة لتصنيف البيانات التجريبية experimental data التي جمعتْ في العقـدين السابقين التي أشـارتا إلـى تركيـب ذري an atomic structure وذري جزئـي subatomic structure والذي أخفق في التوافق مع القواعد المقبولـة للميكانيـك النيوتوني التقليدي classical Newtonian mechanics الذي كان سائد آنذاك. هـذه التفسيرات التي كانت أصلا معروفة باسم ميكانيك المصفوفة matrix mechanics وميكانيكا الموجة wave mechanics نقلت مباشرةً إلى النظرية الحالية للتركيـب الذري المعروف في وقتنا المعاصر باسم ميكانيك الكـم quantum mechanics ، وهذه النظرية تختلف وبشكل جذري عن كل النظريات الميكانيكية الـسابقة بأنّهـا تستخدم المفهوم الاحتمالي، الذي أدى بدوره إلى استبدال مبدأ اليقينيـة التقليديـة classical determinism الذي كان سـائداً بفلـسفة اللاحتميـة philosophy of indeterminism.

إن نظرية جبر المؤثرات على فضاء هيلبرت بدأت في الثلاثينات من القرن الماضي (في عام 1930) من خلال سلسلة أعمال من قبل Neumann و Murray و Neumann . لقد كانت الدوافع الرئيسية لهؤلاء الباحثين بنـاء نظريـة لتمثيـل الزمر الواحدية وتحديد بعض السمات الشكلية للميكانيك الكمي (الكوانتي)، ولأجل ذلك حللوا وبشيء من التفصيل تركيب أسرة من الجبور التي عرفت فيما بعد (أي في وقتنا الحاضر باسم الجبر النويماني von Neumann algebra أو الجبور مـن النوع W^*-algebra ، وهذه الجبور لعبت دوراً متميزاً حتى ١٩٤٣ عندما قام كل

من غيلاند Gelland و نيمارك Naimark بدراسة تحليلية لجبر المؤثرات وتوصلا إلى ما يعرف باسم $C^{*}-$**algebra**.

في الواقع جرى تعاون وطيد بين علماء الرياضيات والفيزياء مـن أجـل التوصل إلى حلّ الإشكاليات ما بين الجانب النظري والتطبيقي، وهذا بدوره ولّـد عدداً كبيراً من النظريات والنتائج التي احتوتها مرجعيـات الميكانيـك الكـوانتي والميكانيك الإحصائي الكمي quantum statistical mechanics.

إن الميكانيك الإحـصائي statistical mechanics جـاء كوسـيلةٍ مكملـةٍ ومساعدة للميكانيك الكمي، وذلك عندما لوحظ صعوبة دراسة عـددٍ كبيـر مـن الجسيمات بآن واحد وفقاً لنظرية ميكانيك الكم، حيث تمكّن الميكانيك الإحـصائي من تقديم دراسات تتعلق بتوزيعات السرع والموضع لعدد كبير (لا بل وفي حالة عدد غير منته ولكنه قابل للعد أيضاً) من الجسيمات.

الفصل الأول

مفاهيم أساسية

مصطلحات ورموز أساسية:

بادئ ذي بدئ أود أن أنوه إلى أنني سأستخدم في هذه الرسالة الرموز والمصطلحات الرياضية الآتية:

N هي مجموعة الأعداد الطبيعية $\{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$.

N_n هي مجموعة الأعداد $\{1, 2, 3, \cdots\cdots, n\}$ مع $n \in N$.

N^0 هي المجموعة $N \cup \{0\}$ ،

وكذلك N_n^0 ترمز للمجموعة $N_n \cup \{0\}$.

Z هي مجموعة الأعداد الصحيحة $\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$.

Q هي مجموعة الأعداد العادية أي أن:

$$Q = \left\{ \frac{k}{n} \; ; \; k \in Z \;\; \& \;\; n \in N \right\}$$

R هي مجموعة الأعداد الحقيقية.

C هي مجموعة الأعداد العقدية (أو المركبة).

الفضاء الخطي: انظر [17]

١-١- تعريف (الفضاء الخطي):

لتكن **E** مجموعة ما غير خالية، ولنعرف عليها عملية الجمع سنرمز لهـا بـ (+) بحيث يكون ما يلي محققاً:

١– من أجل أي عنصرين **u** و **v** من **E** لدينا **u + v** عنصر من **E** أيضاً (أي أن المجموعة **E** مغلقة بالنسبة للعملية (+) ، وبما أن هذه العملية تطبق على عناصر من المجموعة **E** نفسها لذلك تُدعى بعملية داخلية).

٢– العملية (+) تحقّق الخاصية التبديلية، أي أنّه من أجل أي عنصرين **u** و **v** من **E** لدينا:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

٣– العملية (+) تحقّق الخاصية التجميعية، أي أنّه من أجل كل العناصر **u** و **v** و **w** من **E** لدينا:

$$\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

٤- العملية (+) تقبل عنصراً محايد، أي أنّه يوجد عنصر وليكن **θ** من **E** بحيث يكون من أجل كل **u** من **E** لدينا:

$$\boldsymbol{\theta}+\mathbf{u} = \mathbf{u}+\boldsymbol{\theta} = \mathbf{u}$$

٥- لكل **u** من **E** يوجد عنصر وحيد سنرمز له بـ **-u** من **E** بحيث يكون:

$$\mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \boldsymbol{\theta}$$

حيث يدعى العنصر **u –** بـ نظير العنصر **u** the inverse element of بالنسبة للعملية (+).

كذلك سنعرف على المجموعة **E** عملية سنرمز لهـا بـ (•) ندعوها الضرب بحيث يكون ما يلي محقّقاً:

٦- من أجل أي عنصر **u** من **E** وكل عدد k من R (أو C) سيكون $k \cdot \mathbf{u}$ عنصراً من **E** أيضاً (أي أن المجموعة **E** مغلقة بالنسبة

للعملية (•)، ولكن بما أن هذه العملية تطبق على عنصر من المجموعة **E** وآخر من خارجها لذلك تُدعى بعملية خارجية).

٧- العملية (•) توزيعية على عمليـة (+) ، أي أنـه مـن أجـل أي عنصرين **u** و **v** من **E** لدينا:

$$k.(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k.\mathbf{u}+k.\mathbf{v}$$

٨– من أجل أي عنصر **u** من E ومن أجل أي عـددين k و s مـن R (أو C) لدينا:

$$(k+s).\mathbf{u} = k.\mathbf{u} + s.\mathbf{u}$$

٩– العملية (•) تحقّق الخاصية التجميعية، أي أنه من أجل أي عنـصر **u** من **E** ومن أجل أي عددين k و s من R (أو C) لدينا:

$$k.(s.\mathbf{u}) = (k.s).\mathbf{u}$$

١٠– يوجد عنصر (سنرمز له بـ 1) من R (أو C) بحيـث يكـون لدينا:

$$1.\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

حيث يدعى العنصر 1 بـ العنصر الحيادي بالنسبة للعملية (•) .

عندئذ تُدعى المجموعة **E** المزودة بالعمليتين السابقتين فضاء متجهياً خطياً حقيقياً (أو عقدياً عندما يتم الضرب بأعداد عقدية)، أو **فضاء متجهياً** على سـبيل الاختصار، وعلاوةً على ذلك يطلق على أي عنصر **u** من **E** اسم " **متجه** ".

هنا تجدر الإشارة إلى أنه في تعريف الفضاء الخطي لا يوجد تخـصيص لطبيعة المتجهات أو لعمليتي الجمع والضرب السابقتين، وذلك لأنه يمكن أن يكون أي نوع من العناصر هي متجهات، وكل ما هو مطلوب هو تَحقق فروض الفضاء الخطي المذكورة سابقاً، وكذلك يعرف العنصر $\boldsymbol{\theta}$ (المتـجه الصفري) الوارد في التعريف السابق باسم " **صفر الفضاء** ".

١-٢- أمثلة:

١- لو أخذنا المجموعة $\mathbf{E}=\mathrm{R}^n$ مع عمليتي الجمع والضرب المعرفتين من خلال العلاقتين الآتيتين:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = (u_1 + v_1 , u_2 + v_2 , \ldots\ldots , u_n + v_n)$$

$$k\cdot\mathbf{u} = (k\cdot u_1 , k\cdot u_2 , \ldots\ldots , k\cdot u_n)$$

علماً أن $k \ni \mathrm{R}$ و:

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2 , \ldots\ldots , u_n) \in \mathrm{R}^n$$

$$\mathbf{v} = (v_1 , v_2 , \ldots\ldots , v_n) \in \mathrm{R}^n$$

عندئذ نجد أن R^n يحقق الفروض في تعريف الفضاء المتجهي، ومن ثم فإن R^n مع العملتين المذكورتين هو فضاء متجهي.

2ً- لنأخذ المجموعة $\mathbf{E}$ المكونة من جميع المصفوفات ذات المرتبة $m\times n$ والتي عناصرها أعداد حقيقية ومزود بعمليتي الجمع بين المصفوفات والضرب بعدد حقيقي للمصفوفات، عندئذ نجد أن $\mathbf{E}$ هو فضاء خطي.

3ً- لنأخذ $\mathbf{E}$ هي مجموعة كل الدوال الحقيقية المعرفة على R، فإذا كانت f و g أي دالتين من $\mathbf{E}$ ، وكان k عدداً حقيقياً ما، فعندئذ نجد أن $\mathbf{E}$ هو فضاء متجهي خطي بالنسبة إلى عمليتي جمع الدوال وضرب الدوال بعدد حقيقي، علماً أن:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\alpha\cdot f)(x) = \alpha\cdot f(x)$$

وأن المتجه الصفري $\boldsymbol{\theta}$ لهذا الفضاء فهو الدالة الصفرية المميّزة بالعلاقة:

$$\boldsymbol{\theta}(x) = 0 \qquad ; \forall\, x \in \mathrm{R}$$

١-٣- ملاحظات:

1ً- إذا كان $\mathbf{E}$ فضـاء خطياً عندئذ من أجل أي متجه $\mathbf{u}$ من $\mathbf{E}$ وأي عدد k يمكن التحقّق من الخواص الآتية:

١) لدينا $0 \cdot \mathbf{u} = \boldsymbol{\theta}$

٢) لدينا $k \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$

٣) لدينا $(-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$

٤) إذا كان $k \cdot \mathbf{u} = \boldsymbol{\theta}$ ، فعندئذ إما أن يكون $k = 0$ أو أن يكون $\mathbf{u} = \boldsymbol{\theta}$

2ً- إذا كانت عملية الضرب تطبق على أعداد حقيقية (أي من R) فعندئذ يقال عن الفضاء المتّجهي $\mathbf{E}$ إنه فضاء متّجهي حقيقي، وأمـا إذا كانـت عمليـة الضرب تطبق على أعداد عقدية (أي من C) فعندئذ يقال عن الفضاء المتّجهي $\mathbf{E}$ إنه فضاء متّجهي عقدي.

3ً- بما أن الفضاء المتجهي R أو C يحقّق مسلمات الحقل فإنّه يقال عن الفضاء المتّجهي $\mathbf{E}$ إنه معرف فوق الحقل R أو C، وعلى سبيل الاختـصار والتبسيط سنذكر مستقبلاً الحقل R أو C بالرمز K نفسه.

١-٤- تعريف (الفضاء الخطي المنظم):

ليكن $\mathbf{E}$ فضـاء خطياً عندئذ يقال عن هذا الفضاء إنه مـنظم إذا أمكـن مقابلة كل عنصر $\mathbf{u}$ من $\mathbf{E}$ بعدد حقيقي نرمز له بـ $\|\mathbf{u}\|$ بحيث تتحقّق الـشروط الآتية:

1) $\|\mathbf{u}\| \geq 0 \;;\; \forall\, \mathbf{u} \in \mathbf{E} \quad \& \quad \|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \boldsymbol{\theta}$

2) $\|\alpha \cdot \mathbf{u}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{u}\| \quad ;\forall\, \alpha \in \mathrm{K} \;,\; \mathbf{u} \in \mathbf{E}$

3) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \quad ;\; \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{E}$

أما العدد $\|\mathbf{u}\|$ يسمى نظيم العنصر $\mathbf{u}$.

١-٥- تعريف (الفضاء الخطي الجزئي):

ليكن **E** فضاء خطياً و **M** مجموعة جزئية من **E** ، فإذا كان من أجـل أي عنصرين **u** و **v** من **M** ومن أجل كل λ ، μ ∋ K لدينا:

$$\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \in \mathbf{M}$$

عندئذ تُدعى **M** فضاء خطياً جزئياً في **E** .

١-٦- تعريف (الكرة المفتوحة):

ليكن $\mathbf{u}_o$ عنصراً مثبتاً في الفضاء الخطي المنظم **E** وليكن $r > 0$ عدداً حقيقياً مفروضاً عندئذ تُدعى المجموعة (الجزئية من **E**) الآتية:

$$K(\mathbf{u}_o, r) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{E} \;\; ; \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_o\| < r\}$$

كرة مفتوحة مركزها $\mathbf{u}_o$ ونصف قطرها r .

هنا تجدر الإشارة إلى أن أي اجتماع لكرات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة، وهذه المجموعات تُعرف طبولوجيا على الفضاء الخطي المنظم **E**.

١-٧- تعريف (تقارب المتتاليات في الفضاءات المنظمة): انظر [17]

لتكن $(\mathbf{u}_n)$ متتالية عناصر من الفضاء الخطي المنظم **E** ، عندئـذ يقـال إنها متقاربة في **E** إذا وجد عنصر $\mathbf{u}_o \in \mathbf{E}$ بحيث يكون لدينا:

$$\lim_{n \to \infty} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_o\| = 0$$

وحينئذ يدعى العنصر $\mathbf{u}_o$ بـ نهاية المتتالية $(\mathbf{u}_n)$.

١-٨- تعريف (المتتالية الأساسية أو متتالية كوشي في الفضاءات المنظمة):

لتكن $(\mathbf{u}_n)$ متتالية عناصر من الفضاء الخطي المنظم **E** ، عندئذ يقـال إنها متتالية أساسية (أو متتالية كوشي) في **E** إذا كان:

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \|\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_n\| = 0$$

1-٩- ملاحظة:

في الواقع كل متتالية متقاربة هي متتالية أساسية ولكن العكس غير صحيح في الحالة العامة، ولكن في حال المتتاليات الحقيقية يكون العكس صحيحاً.

١-١٠- تعريف (الفضاء التام):

ليكن **E** فضاء خطياً منظماً، فإذا كانت كل متتالية أساسية لعناصـر منـه تتقارب من عنصر ينتمي إليه، فعندئذ يقال عن هذا الفضاء إنه تام.

١-١١- تعريف (فضاء باناخ):

كل فضاء خطي منظم وتام يدعى فضاء باناخ.

١-١٢- تعريف (المجموعة الكثيفة):

ليكن **E** فضاء خطياً منظماً و **M** مجموعة جزئية من هذا الفضاء، فـإذا كان كل عنصر من **E** هو نهاية لمتتالية (متقاربة) من عناصر **M** ، فعندئذ يقـال إن المجموعة **M** كثيفة في **E**.

١-١٣- تعريف (الفضاء الفصول):

ليكن **E** فضاء خطياً منظماً، فإذا وجدت فيه مجموعة جزئية كثيفة وقابلـة للعد، فعندئذ يقال عن هذا الفضاء إنه فصولاً.

١-١٤- تعريف (نصف الجداء الداخلي):

ليكن **H** فضاء خطياً عقدياً، ولنقم بمقابلة أي عنصرين x و y من **H** بعدد عقدي وحيد:

$$\langle .,. \rangle : \mathbf{H}\times\mathbf{H} \xrightarrow[(x,y)\mapsto\langle x,y\rangle]{} \mathrm{C}$$

يرمز له بـ $\langle x , y \rangle$ محققاً للشروط الآتية:

1ً- إن $\langle x , y \rangle$ خطي بـ x لدى y من **H** مثبتاً، أي أن:

$$\langle \alpha\, x_1 + \alpha_2\, x_2 , y \rangle = \alpha_1 \langle x_1 , y \rangle + \alpha_2 \langle x_2 , y \rangle$$

وذلك من أجل كل $\alpha_1, \alpha_2 \ni \mathrm{C}$ وأي $x_1, x_2, y \ni \mathbf{H}$.

2ً- لدينا من أجل كل x و y من $\mathbf{H}$:

$$\langle x , y \rangle = \overline{\langle y , x \rangle}$$

3ً- لدينا $\langle x, x \rangle \geq 0$ من أجل أي x من $\mathbf{H}$.

عندئذ يدعى $\langle x , y \rangle$ بـ نصف جداء داخلي semi-scalar product .

١-١٥- ملاحظات:

1ً- إن الشرط الثاني من التعريف الـسابق يعنـي أن $\langle x , y \rangle$ خطـي تخالفي (أو ضد خطي anti-linear) بالمركبة الثانية y ، وهذا يعني أن:

$$\langle x , \alpha\, y_1 + \alpha_2\, y_2 \rangle = \overline{\alpha_1} \langle x , y_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle x , y_2 \rangle$$

وذلـك مـن أجـل كـل $\alpha_1, \alpha_2 \ni \mathrm{C}$ وأي $x_1, x_2, y \ni \mathbf{H}$ ، ومـن ثـم سيكون $\langle x , x \rangle$ حقيقياً.

2ً- إذا استبدلنا الشرط الثالث من التعريف السابق بالشرط الآتي:

$$\langle x, x \rangle > 0$$

من أجل كل عنصر غير صفري x من $\mathbf{H}$ ، فعندئذ يطلق علـى $\langle x , y \rangle$ اسـم جداء داخلي scalar product.

3ً- يكون لدينا $\langle x, x \rangle = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = \mathbf{0}$.

4ً- الفضاء $\mathbf{H}$ المزود بجداء داخلي $\langle x , y \rangle$ يدعى فضاء جداء داخلي.

5ً- يمكن أن نولد نظيماً على $\mathbf{H}$ من الجداء الداخلي $\langle x , y \rangle$ من خـلال العلاقة الآتية:

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \qquad ; \; x \in \mathbf{H}$$

ومن ثم يمكن القول إن كل فضاء جداء داخلي هو فضاء منظم، والنظيم فيه يعطى بوساطة الجداء الداخلي.

6ً - إذا كان فضاء الجداء الداخلي تاماً فعندئذ يسمى فضاء هلبرت.

النشر في فضاء هلبرت (انظر [6]):

لتكن $\{h_1, h_2, ...\}$ عناصر في فضاء هلبرت الفصول وغير منتهـي الأبعاد H عندئذ:

أ) يقال إن هذه العناصر تشكل جملة متعامدة نظامية في H إذا كان:

$$\langle h_1, h_2 \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i \neq j \\ 0 & ; i = j \end{cases}$$

أي أن العناصر متعامدة مثنى مثنى ونظيم كل واحد منها يساوي 1 .

ب) ليكن $k \ni$ H عندئذ تُسمي الأعداد α_k المعطاة من خـلال العلاقـة الآتية:

$$\alpha_k := \langle k, h_k \rangle \qquad ; k = 1, 2, ...$$

بـ عوامل فورية للعنصر k بالنسبة للجملة المتعامدة النظامية $\{h_1, h_2, ...\}$.

ج) تُسمي المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k h_k$ متسلـسلة فوريـة للعنـصر بالنـسبة للجملة $\{h_1, h_2, ...\}$.

١-١٦- تعريف:

نقول عن الجملة المتعامدة النظامية $\{h_1, h_2, ...\}$ أنّها تامة (مغلقة) في H إذا كانت مساواة بارسيفال الآتية محقّقة من أجل أي عنصر $x \ni$ H:

$$\| x \|^2 = \sum_{r=1}^{\infty} | \alpha_r |^2$$

علماً أنّه لدينا هنا $\alpha_n = \langle x_1, h_n \rangle$.

١-١٧- مبرهنة:

ليكن $\{h_1, h_2, ...\}$ جملة متعامدة نظامية في فـضاء هلبـرت H ،
عندئذ الدعاوى الآتية ستكون متكافئة فيما بينها:

1ً- الجملة $\{h_1, h_2, ...\}$ تامة في H .

2ً- كل عنصر $x \in$ H يكتب وبشكل وحيد كما يلي:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k h_k \qquad ; \alpha_k = \langle x, h_k \rangle$$

3ً- إذا كان $\langle x, h_k \rangle = 0$ من أجل كل $k \in$ N فإن $x = \boldsymbol{\theta}$ (أي لا يوجد في H أي عنصر مغاير للصفر ويعامد جميع عناصر الجملة).

١-١٨- مبرهنة:

ليكن H فضاء هلبرت فصول وغير منتهي الأبعاد، عندئذ توجـد جملـة تامة $\{h_1, h_2, ...\}$، عندئذ التركيبات الخطية المنتهية بالعناصر ...... $h_1, h_2,$ تشكل مجموعة كثيفة في H .

الداليات الخطية

ليكن $\mathbf{E}$ فضاء خطياً حقيقياً أو عقدياً، عندئذ كل تطبيق f من الشكل:

$$f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathrm{K} \quad ; x \mapsto f(x)$$

يسمى دالّي على $\mathbf{E}$ ، ومن أجل K = R يدعى f دالّي حقيقي، وفـي حـال أن K = C فإن f يدعى دالّياً عقدياً.

١-١٩- تعريف الدالّي المحدود:

ليكن f دالّياً خطياً على الفضاء الخطي المنظم $\mathbf{E}$، عندئذ يقال عن f إنه محدوداً إذا وجد ثابت حقيقي $c \geq 0$ بحيث يكون:

$$| f(x) | \leq c \| x \| \qquad ; \forall x \in \mathbf{E}$$

١-٢٠- تعريف الدالّي المستمر:

ليكن f دالّياً على الفضاء الخطي **E**، عندئذ يقال عن f إنه مستمر في النقطة $x_o \in \mathbf{E}$ إذا كان $f(x_o) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_n)$ وذلك من أجل أي متتالية لعناصر (x_n) من **E** متقاربةً من x_o من **E**.

١-٢١- ملاحظة:

إن مفهوم الاستمرار والمحدودية متكافئان بالنسبة للدالّيات.

١-٢٢- تعريف الفضاء المرافق:

ليكن **E** فضاء خطياً منظماً. عندئذ مجموعة كل الدالّيات الخطية المعرفة والمستمرة على **E** تُدعى الفضاء المرافق للفضاء **E** ويرمز لها بـ **E***.

١-٢٣- مبرهنة:

ليكن **E** فضاء خطياً منظماً، عندئذ يكون الفضاء المرافق له **E*** هو فضاء خطي منظم وتام أيضاً.

١-٢٤- تعريف المؤثر:

ليكن $\mathbf{E}_1$ ، $\mathbf{E}_2$ فضائين خطيين، كل تطبيق:

$$A:\mathbf{E}_1 \longrightarrow \mathbf{E}_2 \;\; ; x \mapsto y = A(x)$$

يدعى مؤثراً من $\mathbf{E}_1$ إلى $\mathbf{E}_2$ وعلى سبيل الاختصار نكتب Ax عوضاً عن $A(x)$.

١-٢٥- تعريف المؤثر الخطي:

نقول عن المؤثر $A:\mathbf{E}_1 \longrightarrow \mathbf{E}_2$ أنه خطي إذا كان:

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2$$

وذلك مهما يكن العددان $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ وأي $x_1, x_2 \in D(\mathbf{E})$ علماً أن $D(\mathbf{E})$ هي ساحة تعريف المؤثر $D(A)$.

الاستمرار والمحدودية

١-٢٦- تعريف:

ليكن المـؤثر $A:\mathbf{E}_1 \longrightarrow \mathbf{E}_2$ علمـاً أن E_1 ، E_2 فـضائيين خطيـين منظمين، عندئذ يقال عن المؤثر A إنه محدوداً إذا وجد ثابت موجب $c>0$ بحيث يكون:

$$\|Ax\|_{\mathbf{E}_2} \le c \cdot \|x\|_{\mathbf{E}_1}$$

١-٢٧- مبرهنة:

ليكن المؤثر الخطي $A:\mathbf{E}_1 \longrightarrow \mathbf{E}_2$ عندئذٍ يكون A مستمراً إذا وفقط إذا كان محدوداً.

١-٢٨- مبرهنة:

ليكن $A:\mathbf{E}_1 \longrightarrow \mathbf{E}_2$ مؤثراً خطياً محدوداً، عندئذٍ سيكون لدينا:

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|x\| \le x \\ x \ne \theta}} \|Ax\|_{\mathbf{E}_2} = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ x \ne \theta}} \frac{\|Ax\|_{\mathbf{E}_2}}{\|x\|_{\mathbf{E}_1}} < c$$

١-٢٩- مبرهنة:

مجموعة كل المؤثرات الخطية المحدودة مع النظيم الآتي:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\|_{\mathbf{E}_2}$$

وعمليتي الجمع والجداء بعدد تشكل فضاء خطياً منظماً.

١-٣٠- تعريف المؤثر المرافق لمؤثر:

ليكن H فضاء هيلبرت، ولنأخذ المؤثّر $A:\mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H}$ ، فإذا وجد مؤثر آخر B على H بحيث تتحقق العلاقة الآتية:

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$$

فعندئذ يدعى المؤثر B مؤثراً مرافقاً للمؤثر A ونرمز له بـ A^* بدلاً مـن B ويكون:

$$\langle A(x), y\rangle = \langle x, A^*(y)\rangle$$

١-٣١- ملاحظات:

1ً- سنرمز لمجموعـة كـل المـؤثرات الخطيـة المحـدودة فـي H بـ **B (H)**.

2ً- التطبيق المطابق على فضاء هلبرت H هو مؤثر محدود ويرمز له بـ I .

3ً- المؤثر $A \in$ B (H) يدعى مؤثر إسقاط إذا كان $A = A^2 = A^*$.

٤- المؤثر $A \in$ B (H) يدعى مؤثراً غير سالب إذا تحقق ما يلـي من أجل كل $x \in$ H .

$$\langle Ax, x\rangle \geq 0$$

5ً- المؤثر $A \in$ B (H) يدعى إيزومترياً إذا تحقق $A A^* = 1$.

6ً- المؤثر $A \in$ B (H) يدعى طبيعياً normal إذا تحقّقت العلاقة الآتية:

$$A A^* = A^* A$$

١-٣٢-تعريف الجبر (انظر [3] و (انظر [13]):

ليكن A فضاء خطياً، ولنعرف عليـه عمليـة داخليـة **(•)** سـندعوها الضرب بحيث يتحقّق ما يلي:

1ً- من أجل كل $y, x \ni$ A لدينا $x \cdot y \in$ A

2ً- من أجل كل x,y,z ∍ A لدينا:

$$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$$

3ً- من أجل كل x,y,z ∍ A لدينا:

$$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$$

4ً- من أجل كل x,y,z ∍ A لدينا:

$$(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$$

5ً- من أجل كل x,y ∍ A ومن أجل أي λ ∍ K لدينا:

$$\lambda\cdot(x\cdot y)=(\lambda\cdot x)\cdot y=x\cdot(\lambda\cdot y)$$

عندئذ يدعى A جبراً.

١-٣٣- ملاحظات:

1ً- إذا عرف على الجبر A نظيماً $\|\bullet\|$ (يحقق شروط النظـيم الثلاثـة السابقة) ومحققاً للخاصية الآتية أيضاً من أجل كل x,y ∍ A:

$$\|x\cdot y\|\le\|x\|\cdot\|y\|$$

عندئذ يقال عن هذا الجبر إنّه جبر منظّم، وتُعرف الخاصـية الممثلـة بالعلاقـة الأخيرة باسم الخاصية نصف الضربية للنظـيم (submultiplicative property of the norm).

2ً- يوجد في بعض الجبور عنصر وحيد غير مساوٍ لصفر الفضاء مثل **e** بحيث يحقّق:

$$\mathbf{e}\cdot x=x\cdot\mathbf{e}=x \qquad ;\forall x\in A$$

ويسمى هذا العنصر بـ عنصر الوحدة An identity element .

3ً- إذا كان الجبر المنظم A يحوي عنصر وحدة **e** فعندئذ سيكون:

$$\|\mathbf{e}\|=1$$

4ً- إذا كان من أجل كل x,y ∍ A لدينا:

$$x\cdot y=y\cdot x$$

عندئذ يقال عن الجبر A إنّه تبديلي.

١-٣٤- تعريف الهومومورفيزم:

ليكن A و B جبـريين عندئـذٍ يـسمي التطبيـق $f:A\longrightarrow B$ هومومورفيزماً إذا وفقط إذا حقّق ما يلي:

1ً- من أجل كل $x,y\in A$ وأي $\lambda,\mu\in K$ لدينا:

$$f(\lambda\cdot x+\mu\cdot y)=\lambda\cdot f(x)+\mu\cdot f(y)$$

2ً- من أجل كل $x,y\in A$ لدينا:

$$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$$

وهذا يعني أن التطبيق f خطي وضربي.

الفصل الثاني

جبر باناخ والجبر– C^*

Banach algebras and C*- algebras

عندما نذكر مستقبلاً مصطلح جبر إنّما نقصد بذلك جبر خطي منظّم، هذا من جانب، ومن جانب آخر إذا لم يتم تحديد حقل الأعداد المتعامل معه فإن هذا الحقل هو الحقل العقدي.

٢-١- تعريف (جبر باناخ Banach algebras (انظر [3]) و [13])**):**

ليكن A جبراً منظماً، فإذا كان A هو فضاء تام (أي A هو فضاء باناخ) فعندئذ يقال عن A إنه جبر باناخ.

من الأمثلة على جبور باناخ:

1ً- إن الفضاء العقدي مع عمليتي الضرب والجمع المعرفتين عليه (المعروفتين) والنظيم المعرف عليه من خلال العلاقة الآتية:

$$\| z \| = | z | \qquad ; \forall z \in C$$

هو جبر باناخ تبديلي مع عنصر واحدي، وهذا واضح، إذ إننا نعلم أن C فضاء خطي كما أنه جبر تبديلي، وكذلك لدينا:

$$\| z_1 \cdot z_2 \| = | z_1 | \cdot | z_2 | = \| z_1 \| \cdot \| z_2 \|$$

وذلك من أجل كل $z_1, z_2 \in C$.

أي أن النظيم تُحقق الخاصية الضربية.

2ً- إن الفضاء R مع عمليتي الجمع والضرب المألوفتين هو جبر باناخ تبديلي حقيقي مع وجود عنصر وحدة (والذي هو (1)).

3ً- الفضاء R^2 والذي يعبر عنه بالشكل الآتي أيضاً:

$$R^2 = \{ x ; x = (x_1, x_2) \quad ; \forall x_1, x_2 \in R \}$$

إذ إننا نعلم أن هذا الفضاء هو فضاء تام مع النظيم الآتي:

$$\| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \qquad ; \forall \ x = (x_1, x_2) \in R^2$$

ولو أخذنا على R^2 عملية الضرب المعرفة بالشكل الآتي:

$$x \bullet y = (x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 \ , \ x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \qquad ; \ \forall \ x, y \in R^2$$

علماً أن $y = (y_1, y_2)$ و $x = (x_1, x_2)$.

عندئذ نجد بسهولة أن R^2 مع عملية الضرب السابقة تشكل جبر تبديلي مع وجود عنصر وحدة (والذي هو $\mathbf{e} = (1,0)$)، ومن ثم فإن R^2 هو جبر باناخ تبديلي مع عنصر الوحدة $\mathbf{e} = (1,0)$.

3ً- الفضاء $C[0,1]$:

لتكن $C[0,1]$ هي مجموعة كل الدوال المعرفة والمستمرة على الفترة $[0,1]$، ولنعرف على هذه المجموعة عمليتي الجمع والضرب المألوفتين على الدوال:

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) \qquad ; \forall f, g \in C[0,1]$$

$$(f \bullet g)(t) = f(t) \cdot g(t) \qquad ; \forall f, g \in C[0,1]$$

وبما أن مجموع وجداء دالتين مستمرتين هي دالة مستمرة فإنه سيكون لدينا:

$$f + g \in C[0,1] \quad \& \quad f \bullet g \in C[0,1]$$

وبتعريف نظيم على هذا الفضاء من خلال العلاقة الآتية:

$$\| f \| = \max_{t \in C[0,1]} | f(t) |$$

فنجد أن:

$$\| f \cdot g \| = \max_{t \in C[0,1]} | f(t) \cdot g(t) |$$

$$= | f(t_o) \cdot g(t_o) | \le | f(t_o) | \cdot | g(t_o) |$$

$$= \max_{t \in C[0,1]} | f(t) | \cdot \max_{t \in C[0,1]} | g(t) |$$

$$= \| f \| \cdot \| g \| \qquad ; \forall \ f, g \in C[0,1]$$

عندئذ نجد أن هذا الفضاء هو فضاء باناخ، وأكثر من ذلك نجد أنه جبر تبديلي مع عنصر وحدة $\mathbf{e=1}$، هذا المثال يعرف باسم " جبر الدوال function algebra ".

٢-٢- تعريف (الالتفاف An involution (انظر [3] و [13])**):**

ليكن A جبراً منظّماً، ولنأخذ التطبيق:

$$f : \mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{A} \qquad ; a \mapsto a^*$$

عندئذ نقول أن f يمثل التفاف إذا تحقق ما يلي :

1) $a^{**} = a$

2) $(\lambda a + \mu b)^* = \bar{\lambda} a^* + \bar{\mu} b^*$

3) $(a\, b)^* = b^* a^*$

٣-٢- تعريف (الـ C* **- جبر** C*-algebra (انظر [3])**) :**

ليكن A جبر باناخ مزوداً بعملية الالتفاف (*) ومحققاً للشرط الآتي :

$$C^*) \qquad \| a^{**} \| = \| a \|^2$$

فعندئذ يقال عن الجبر A إنه من النوع C* والذي سنكتبه على الشكل C^*- **جبر**.

٢-٣- ملاحظات:

1ً- إن عبارة " باناخ مع الالتفاف" تشير إلى الحالة التي يكون بها الالتفاف تطبيق مستمر.

2ً- إذا كان من أجل كل $a \in A$ لدينا:

$$\| a^* \| = \| a \|$$

فعندئذ يقال عن الالتفاف إنه إيزومتري.

٢-٤- نتائج:

1ً- من أجل A هو C^*- **جبر** سيكون التطبيق (تطبيق الجداء):

$$(\bullet): A \times A \longrightarrow A \qquad ; (a,b) \mapsto ab$$

هو تطبيق مستمر وهذا ينتج بتطبيق العلاقة $\| a \cdot b \| \le \| a \| \cdot \| b \|$ ومتباينة المثلث للنظيم على نظيم المطابقة الآتية:

$$ab - a_o b_o = (a - a_o)(b - b_o) + (a - a_o)\, b_o + a_o\, (b - b_o)$$

فينتج لدينا:

$$\| ab - a_o b_o \| \le \| a - a_o \| \cdot \| b - b_o \| + \| a - a_o \| \cdot \| b_o \| + \| a_o \| \cdot \| b - b_o \|$$

2ً- من أجل A هو C^*- **جبر** سيكون الالتفاف أيزومترياً، وذلك لأنـه باستعمال الشرط C^* و العلاقة $\| x \cdot y \| \le \| x \| \cdot \| y \|$ ينـتج لـدينا مـن أجـل أي $a \in A$ ما يلي:

$$\| a \|^2 = \| a \cdot a^* \| \le \| a \| \cdot \| a^* \|$$

ولذلك يصبح لدينا:

$$\| a \| \le \| a^* \|$$

وبتطبيق الاستنتاج السابق على a^* يعطينا المتباينة $\| a^* \| \geq \| a \|$ ، ومن ذلك ينتج لدينا:

$$\| a \| = \| a^* \|$$

3ً- من أجل A هو $C^* -$ **جبر** سيكون لدينا:

$$\| a \| = \sup_{\substack{x \in A \\ \| x \| \leq 1}} \| a x \| = \sup_{\substack{x \in A \\ \| x \| \leq 1}} \| x a \| \qquad (*)$$

ولكن من الواضح أنه:

$$\sup_{\substack{x \in A \\ \| x \| \leq 1}} \| a x \| \leq \sup_{\substack{x \in A \\ \| x \| \leq 1}} \| a \| \cdot \| x \| \leq \| a \|$$

وبأخذ:

$$x = \frac{a^*}{\| a^* \|} = \frac{a^*}{\| a \|}$$

فإننا سنحصل على العلاقة السابقة (*).

4ً- إذا كان في الـ $C^* -$ **جبر** A عنصر وحدة e فعندئذ سيكون لدينا:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^*$$

وذلك أنه في أي جبر سيكون عنصر الوحدة وحيداً، ومن ثم من أجل كل $a \in A$ سيكون لدينا:

$$a \mathbf{e}^* = \left(a \mathbf{e}^* \right)^* = (a)^* = a$$

وبشكل مماثل نجد أن $a = \mathbf{e}^* a$ ، وبما أنه لدينا:

$$a \mathbf{e} = \mathbf{e} a$$

فإنَّه سينتج لدينا $\mathbf{e} = \mathbf{e}^*$.

٢-٥- ملاحظات:

1ً- من أجل A هو C^*- **جبر** نلاحظ أن الشرط C* يجعل النتيجـة القائلة من أنه إذا وجد عنصر وحدة $\mathbf{e}$ فإنَّـه سيكون $\|\mathbf{e}\|=1$ غير ضرورية لأنَّـه سيكون لدينا في هذه الحالة ما يلي:

$$\|\mathbf{e}\|=\|\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^*\|=\|\mathbf{e}\|^2$$

وبما أنَّ $\mathbf{e}\neq\theta$ فإنَّه سيكون $\|\mathbf{e}\|=1$.

2ً- يمكن الاستعاضة عن الشرط C* بالعلاقة الآتية:

$$\|a\|^2\leq\|a\cdot a^*\|$$

وذلك لأنه يكفي أن استخدام العلاقة $\|a\|=\|a^*\|$ في الفقرة السابقة (2ً) ، وأما المتباينة المعاكسة فهي نتيجة للمتباينة $\|ab\|\leq\|a\|\cdot\|b\|$ فيكون لدينا:

$$\|a\cdot a^*\|\leq\|a\|\cdot\|a^*\|=\|a\|^2$$

في الحقيقة إن العلاقة:

$$\|a\cdot a^*\|=\|a\|^2$$

يمكن استبدالها بالعلاقة:

$$\|a\cdot a^*\|=\|a\|\cdot\|a^*\|$$

٢-٦- أمثلة:

1ً- ليكن $\mathbf{E}$ فضاء متجهياً متراصاً، ولنأخذ $\mathbf{C}(\mathbf{E})$ فضاء باناخ لكل الدوال العقدية والمعرفة على $\mathbf{E}$ مع النظيم:

$$\|f\|=\sup_{x\in\mathbf{E}}\|f(x)\|$$

وأما الجداء في $\mathbf{C}(\mathbf{E})$ معرف من خلال العلاقة الآتية:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad ; \forall x \in \mathbf{E}$$

في حين أن الالتفاف بالمرافق العقدي هو:

$$f^*(x) = \overline{f(x)} \qquad ; \forall x \in \mathbf{E}$$

هنا نلاحظ أن $\mathbf{C(E)}$ هو C^* **- جبر** تبديلي وله عنصر وحدة e هو الدالة:

$$\mathbf{e}(x) = 1 \qquad ; \forall x \in \mathbf{E}$$

2ً- ليكن **E** فضاء متجهياً متراص موضعياً، ولنأخذ $\mathbf{C_0(E)}$ فضاء باناخ لكل الدوال العقدية والمعرفة على **E** والتي تنعدم عند اللانهاية مع النظيم الآتي:

$$\| f \| = \sup_{x \in \mathbf{E}} \| f(x) \|$$

وهنا نجد من جديد أن $\mathbf{C_0(E)}$ هو C^* **- جبر** تبديلي، ولكنه لا يملك عنصر وحدة.

3ً- ليكن **H** فضاء هلبرت، ولنأخذ $\mathrm{A}\ (\mathbf{H})$ جبر كل المؤثرات الخطيـة المستمرة على **H** ، ومن أجل مؤثر $A \in \mathrm{A}\ (\mathbf{H})$ لنأخـذ A^* هـو المرافـق المعروف. عندئذ من الواضح أن $\mathrm{A}\ (\mathbf{H})$ هو C^* **- جبر** ، وعلاوة على ذلـك أي جبر جزئي $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}\ (\mathbf{H})$ سيكون مغلقاً تحت عملية المرافقة (وهذا يعني أنه من أجل $A \ni \mathrm{B}$ سيكون $A^* \ni \mathrm{B}$) ومغلقاً بحسب مفهوم النظيم (لأنه تام).

هنا تجدر الملاحظة إلى أنه إذا كان **H** هو فضاء بانـاخ فعندئـذ سـيكون الجبر $\mathrm{A}\ (\mathbf{H})$ هو جبر باناخ، ولكن إذا كان **H** لـيس فـضاء هلبـرت فـإن $\mathrm{A}\ (\mathbf{H})$ لا يشكّل C^* **- جبر** في الحالة العامة.

4ً- ليكن **D** قرص الواحدة المفتوح، ولنأخذ $\mathrm{A}\ (\mathbf{D})$ مجموعة كل الدوال التحليلية على **D** والمستمرة على غلاقتها $\overline{\mathbf{D}}$. عندئذ نجد أن $\mathrm{A}\ (\mathbf{D})$ هو جبـر جزئي من $\mathbf{C}(\overline{\mathbf{D}})$، وهنا نلاحظ أن $\mathrm{A}\ (\mathbf{D})$ ليست مغلقة تحت عملية الالتفـاف

المترافق العقدي complex conjugation involution. لكن مـن الممكـن إيجـاد التفاف طبيعي آخر يمكن تعريفه على $A(\mathbf{D})$ من خلال أخذ:

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})} \qquad ; \forall z \in \mathbf{D}$$

وبملاحظة أن $\|f\| = \|f^*\|$ وهذا يعني أن هذا الالتفاف إيزومتري.

كذلك نلاحظ أنه إذا كان $f\,g = \theta$ فإنه إما f أو g أو كلاهما يجـب أن ينعدم عند عدد غير منته من النقاط داخل **D** ولذلك واعتماداً على مبرهنة معروفة في نظرية الدوال العقدية يجب أن يكون صفراً، وبشكل خاص إذا كان $f \cdot f^* = \theta$ فإنه سينتج لدينا $f = \theta$ ، وعلى أي حـال فـإن $A(\mathbf{D})$ لا يـشكّل C^*- **جبر**، ولتوضيح ذلك لنأخذ على سبيل المثال:

$$f(z) = e^z \qquad ; \forall z \in \mathbf{D}$$

فعندئذ نجد أن:

$$\|f \cdot f^*\| = 1 \qquad \& \qquad \|f\| \geq e$$

وهكذا ينتج لدينا:

$$\|f \cdot f^*\| \neq \|f\|^2$$

5- ليكن $L^1(\mathrm{R})$ فضاء باناخ لكل للدوال الحقيقية القابلة للمكاملة على R بالنسبة إلى قياس لوبيغ مع النظيم العادي:

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

وأما الجداء لدالتين f و g من $L^1(\mathrm{R})$ سنعرفه من خـلال عمليـة الـتلاف convolution والتي لها العرض الآتي:

$$f_* g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, f(x-t)\, dt$$

وبإجراء تغير في المتحول من خلال وضع $u=x-t$ في التكامل الـسابق ينـتج لدينا:

$$f_* g\,(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\,(x-u)\;f\,(u)\;du$$

وباستعمال نظريتي فوبيني Fubini وتونيلي Tonelli نجد أن:

$$\left\| f_* g \right\|_1 \le \| f \|_1 \cdot \| g \|_1$$

وهكذا ينتج لدينا أن $L^1(\mathbb{R})$ هو جبر باناخ تبديلي ولكنّـه لا يـشكّل **جبر** $-C^*$ حيث يمكن للمرء أن يعرف التفاف ايزومتري من خلال العلاقة الآتية:

$$f^*(x) = \overline{f\,(-x)}$$

٢-٧- ملاحظة (انظر [3]):

معظم المصطلحات المستخدمة فـي **جبر** $-C^*$ موروثـة مـن مبرهنـة المؤثرات على فضاء هلبـرت، فعلـى سـبيل المثـال يقـال عـن عنـصر x من C^*- **جبر** إنه مترافق ذاتياً إذا كان $x^* = x$ ، ويقال عنه عادياً (أو طبيعيـاً) إذا كان:

$$x\,x^* = x^* x$$

وأكثر من ذلك إذا كان لـ C^*- **جبر** A عنصر وحدة e فعندئذ يقال عن عنصر $x \in$ A إنه واحدي إذا كان:

$$x\,x^* = x^* x = \mathbf{e}\,.$$

٢-٨- تعريف الطيف لعنصر من جبر باناخ (انظر [15]):

ليكن A جبر باناخ مع عنصر وحدة e ، عندئذ طيـف عنـصر $x \in$ A يعرف على أنه مجموعة كل الأعداد العقدية λ بحيـث أن $\lambda\mathbf{e}-x$ لـيس لـه مقلوب في A وسنرمز لطيف العنصر x بالرمز $\mathbf{sp}(x)$ ، أي أن:

$$\mathbf{sp}(x) = \{\lambda \in \mathbb{C}\; ;\; \lambda\,\mathbf{e} - x \quad is\ singular\}$$

٢-٩- ملاحظات:

1ً- هنا تجدر الملاحظة إلى أنه قد يكون عنصراً x موجوداً في أكثر من جبر، ولذلك من الضروري تحديد الجبر الذي نعمل فيه، ولذلك سنكتب $\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}\ (x)$ من أجل طيف العنصر x بالنسبة للجبر A.

2ً- إن $\mathsf{C} \backslash \mathbf{sp}_{\mathsf{A}}\ (x)$ متممة $\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}\ (x)$ (بالنسبة إلى C) تُسمى مجموعة التحلّل لـ x the resolvent set of ، وسنرمز لها بـ $\mathbf{res}_{\mathsf{A}}\ (x)$.

لاحظ أن المفاهيم الواردة أعلاه متطابقة مع تلك المفاهيم المستخدمة في مبرهنة المؤثرات وهذا يقتضي تعميماً للقيم الذاتية في مبرهنة المصفوفات.

في الواقع لدى دراسة الطيف لعنصر سيكون من الضروري مناقشة متى يكون لهذا العنصر مقلوب. التوطئة الآتية تجيب على هذه القضية.

٢-١٠- توطئة:

ليكن A جبر باناخ و $x \in$ A عنصراً معطى، فإذا كان $\| x \| < 1$ فعندئذ سيكون $(\mathbf{e} - x)^{-1}$ موجوداً.

الإثبات:

بما أن $\| x^n \| \le \| x \|^n$ و $\| x \| \le 1$ فإنه من الواضح ستكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ متقاربة مطلقاً (أي أن $\sum_{n=0}^{\infty} \| x^n \|$ كمتسلسلة من الأعداد الحقيقية متقاربة)، ومن ثم لها مجموع وليكن y.

الآن بملاحظة أن:

$$\mathbf{e} - x^{n+1} = (\mathbf{e} - x)(\mathbf{e} + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^n)$$

$$= (\mathbf{e} + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^n)(\mathbf{e} - x)$$

وبأخذ النهاية على أطراف العلاقة السابقة ينتج لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{e} - x^{n+1}) = \mathbf{e}$$

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{e} - x)(\mathbf{e} + x + x^2 + x^3 + \dots\dots + x^n) = (\mathbf{e} - x)\cdot y$$

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{e} + x + x^2 + x^3 + \dots\dots + x^n)(\mathbf{e} - x) = y\cdot(\mathbf{e} - x)$$

ومن ثم ينتج لدينا:

$$\mathbf{e} = (\mathbf{e} - x)\cdot y = y\cdot(\mathbf{e} - x)$$

وهذا يبين أن y هو مقلوب $(\mathbf{e} - x)$.

٢-١١- ملاحظات:

1ً- يعبر عن التوطئة السابقة بالشكل الآتي أيضاً:

إذا كان $1 \le \|\mathbf{e} - x\|$ فإن x^{-1} موجود.

2ً- إن مفهوم التقارب المطلق للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ في فضاء باناخ يقوم على التقارب للمتسلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty}\|x_n\|$.

3ً- من أجل متسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ متقاربة مطلقاً نكتب $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ ، ومن ثم سيكون لدينا:

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\|$$

وبما أن المتسلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty}\|x_n\|$ متقاربة فإن (S_n) هي متتالية كوشي، ومن ثم فإن متتالية كوشي ستكون متقاربة. وهذا يبين أن المتسلسلات المتقاربة مطلقاً في فضاء باناخ هي متسلسلات متقاربة أيضاً.

٢-١٢- مبرهنة:

ليكن A جبر باناخ و $G \subseteq$ A مجموعة العناصر التي لها مقلوب (أي أن G هي مجموعة العناصر القابلة للقلب أو العكس) في A عندئذ سيكون لدينا ما يلي:

1ً- المجموعة G مفتوحة.

2ً- التطبيق $x \mapsto x^{-1}$; $f : G \longrightarrow G$ مستمر على G.

البرهان: من أجل:

1ً- لتبيان ذلك علينا أن نبين أنه إذا كان $a \in G$ فإنه من أجل x له نظيم صغير بقدر كافٍ فإن $a + x \in G$، وبكتابة:

$$a + x = a(\mathbf{e} + a^{-1}x)$$

ومن التوطئة السابقة نعلم أنه إذا كان $\| a^{-1}x \| < 1$ ، ومن ثم سيكون $(\mathbf{e} + a^{-1}x)$ قابلاً للعكس، ومنه سينتج لدينا أن $a + x$ قابلاً للعكس أيضاً. هكذا فعندما يكون:

$$\| x \| < \frac{1}{\| a^{-1} \|}$$

فعندئذ سيكون $a + x \in G$ ، ومن ثم فإن الكرة المفتوحة التي مركزها a ونصف قطرها $\| a^{-1} \|^{-1}$ هي مجموعة جزئية من G ، وبالتالي فالمجموعة G مفتوحة.

2ً- لنأخذ $a \in$ A وليكن $\varepsilon > 0$ معطى عندئذ يمكننا أن نكتب ما يلي:

$$\begin{aligned} \| a^{-1} - b^{-1} \| &= \| b^{-1}(b - a) a^{-1} \| \\ &= \left\| \left(b^{-1} - a^{-1}\right)(b - a)\, a^{-1} + a^{-1}(b - a)\, a^{-1} \right\| \\ &\leq \| b^{-1} - a^{-1} \| \cdot \| b - a \| \cdot \| a^{-1} \| + \| b - a \| \cdot \| a^{-1} \|^2 \end{aligned}$$

وهكذا سيكون لدينا:

$$\left\| a^{-1}-b^{-1} \right\| \cdot \left(1-\| b-a \| \cdot \left\| a^{-1} \right\| \right) \le \| b-a \| \cdot \left\| a^{-1} \right\|^2$$

والآن لنأخذ $\| b-a \|$ صغيراً بقدرٍ كاف بحيث يصبح:

$$\left(1-\| b-a \| \cdot \left\| a^{-1} \right\| \right) > \frac{1}{2}$$

عندئذ نلاحظ أن $\left\| a^{-1}-b^{-1} \right\|$ من الممكن أن يكون صغيراً بالقـدر الـذي نريـد (أي $\left\| a^{-1}-b^{-1} \right\| < \varepsilon$) إذا أخذنا $\| b-a \|$ صغير بقدر كـاف، وهـذا يعنـي أن التطبيق f مستمر.

٢-١٣- مبرهنة:

ليكن A جبر باناخ و $x \ni$ A عنصراً ما، فعندئذ سيكون $\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}\ (x)$ هو مجموعة غير خالية جزئية ومتراصة من C .

البرهان:

سنبين أولاً أن $\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}\ (x)$ هو مجموعة محدودة. في الحقيقة من أجل $\lambda \ni$ C فإذا كان $|\lambda| > \| x \|$ فإن $\left\| \lambda^{-1} x \right\| < 1$، وبالتالي وباستخدام التوطئة السابقة **(٢-١٠)** سيكون للعنصر $\lambda\, \mathbf{e} - x = \lambda\, (\mathbf{e} - \lambda^{-1} x)$ مقلوباً، ومـن ثـم سـتكون المجموعة $\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}\ (x)$ محتواة في الكرة التي مركزها 0 ونصف قطرها $\| x \|$.

والآن لإثبات أن المجموعـة $\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}\ (x)$ مغلقـة سـنبين أن المجموعـة $\mathbf{res}_{\mathsf{A}}\ (x)$ مفتوحة على النحو الآتي.

إذا كان $\lambda \in \mathbf{res}_{\mathsf{A}}\ (x)$ فإن العنصر $\lambda\, \mathbf{e} - x \ni G$ (علمـاً أن G هـي مجموعة العناصر القابلة للقلب أو العكس الواردة في المبرهنـة **(٢-١٢)** وهـي مجموعة مفتوحة كما بينا ذلك سابقاً، ولذلك فإنه من أجل $\varepsilon > 0$ فإن أي عنصر b يحقق المتباينة الآتية:

$$\| b-(\lambda\, \mathbf{e} - x) \| < \varepsilon$$

سيكون منتمياً إلـى G ، وهكـذا فـإذا كـان $|\mu-\lambda|<\varepsilon$ مـع $\mu \in \mathbb{C}$ فـإن العنصر $\mu\,\mathbf{e}-x$ سينتمي إلى G ، ولذلك سينتج لدينا أن $\mu \in \mathbf{res}_{\mathsf{A}}\ (x)$ ، وهذا يثبت أن $\mathbf{res}_{\mathsf{A}}\ (x)$ مفتوحة، بمعنى آخر يمكننا القول إن المجموعة $\mathbf{res}_{\mathsf{A}}\ (x)$ تكون مفتوحة طالما أنها صورة للمجموعة المفتوحة G وفقاً للدالة المستمرة:

$$\lambda \mapsto \lambda\,\mathbf{e}-x$$

إذن ستكون المجموعة $\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}\ (x)$ مغلقة.

والآن لإثبات أن $\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}\ (x)\neq\varnothing$ نلاحظ أنه إذا كـان $\lambda,\mu \in \mathbf{res}_{\mathsf{A}}\ (x)$ فإن:

$$(\lambda\,\mathbf{e}-x)^{-1}-(\mu\,\mathbf{e}-x)^{-1}=\left[(\mu\,\mathbf{e}-x)(\mu\,\mathbf{e}-x)^{-1}\right](\lambda\,\mathbf{e}-x)^{-1} -\left[(\lambda\,\mathbf{e}-x)(\lambda\,\mathbf{e}-x)^{-1}\right](\mu\,\mathbf{e}-x)^{-1}$$

والتي نجد منها:

$$(\lambda\,\mathbf{e}-x)^{-1}-(\mu\,\mathbf{e}-x)^{-1}=(\mu-\lambda)\,(\lambda\,\mathbf{e}-x)^{-1}(\mu\,\mathbf{e}-x)^{-1}$$

هذه العلاقة الأخيرة تُسمى معادلة التحلّل resolvent equation (انظر [3]).

والآن بفرض أن A' هو فضاء باناخ الثنوي لـ A ، عندئذ من أجـل $\varphi \in \mathsf{A}'$ وبأخذ الدالة:

$$f(\lambda)=\varphi\left((\lambda\,\mathbf{e}-x)^{-1}\right)$$

عندئذ تكون f هولومورفي holomorphic على $\mathbf{res}_{\mathsf{A}}\ (x)$ طالما أن:

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= \lim_{\mu\to\lambda} \frac{f(\mu)-f(\lambda)}{\mu-\lambda} \\ &= \lim_{\mu\to\lambda} \varphi\left(\frac{(\mu\,\mathbf{e}-x)^{-1}-(\lambda\,\mathbf{e}-x)^{-1}}{\mu-\lambda}\right) \\ &= \lim_{\mu\to\lambda} \varphi\left(-(\lambda\,\mathbf{e}-x)^{-1}(\mu\,\mathbf{e}-x)^{-1}\right) \\ &= \varphi(\lambda\,\mathbf{e}-x)^{-2} \end{aligned}$$

لاحظ أننا استعملنا الاستمرار لخاصية قابلية القلب (الفقرة 2ً من المبرهنة ٢-١٢) عدة مرات وكذلك استخدمنا خاصية الاستمرار للدالية φ.

الآن إذا كانت المجموعة $\mathbf{sp}_A\ (x)$ خالية فإن الدالة f ستكون معرفةً entire أيضاً.

إن ما سبق يبين أن f محدودة وتامة (صحيحة) وبالتالي باستخدام مبرهنة ليوفيل ستكون f ثابتة ونهايتها عندما $|\lambda| \to \infty$ ستكون $f = \theta$ ، ولكن اعتماداً على مبرهنة هان باناخ يمكننا أن نختار φ بحيث أن:

$$\varphi\left(-x^{-1}\right) = f(0) \neq 0$$

وبالتالي f لا يمكن أن تكون تامة ومن ثم ستكون المجموعة $\mathbf{sp}_A\ (x)$ ليست خالية.

٢-١٤- مبرهنة (مبرهنة التطبيق الطيفي Spectral Mapping Theorem):

ليكن A جبر باناخ يملك عنصر وحدة، و x عنصراً من هذا الجبر A عندئذ:

1ً- إذا كان $\mathbf{p}$ كثير حدود فإن:

$$\mathbf{sp}_A\ (\mathbf{p}(x)) = \left\{ \mathbf{p}(\lambda) \quad ; \lambda \in \mathbf{sp}_A\ (x) \right\}$$

2ً- إذا كان $\theta \notin \mathbf{sp}_A\ (x)$ فعندئذ سيكون لدينا:

$$\mathbf{sp}_A\ (x^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} \quad ; \lambda \in \mathbf{sp}_A\ (x) \right\}$$

البرهان:

من أجل الفقرة:

1ً- من أجل أي عدد عقدي $\lambda \in C$ توجد كثيرة حدود $\mathbf{p}$ بـ x بحيث يكون لدينا:

$$\mathbf{p}(\lambda)\ \mathbf{e} - \mathbf{p}(x) = (\lambda\, \mathbf{e} - x)\ \mathbf{p}(x) = \mathbf{p}(x)(\lambda\, \mathbf{e} - x)$$

وبالتالي فإذا كان $\mathbf{p}(\lambda)\,\mathbf{e}-\mathbf{p}(x)$ له مقلوب، فعندئذ سيكون لـ $(\lambda\,\mathbf{e}-x)$ مقلوباً أيضاً، وهكذا فمن أجل $\lambda\in \mathbf{sp}_{\mathrm{A}}\ (x)$ سينتج لدينا:

$$\mathbf{p}(\lambda)\in \mathbf{p}\left(\mathbf{sp}_{\mathrm{A}}\ (x)\right)$$

بالمقابل فإذا كان $\mu\in \mathbf{sp}_{\mathrm{A}}\ \left(\mathbf{p}(x)\right)$ فإنه سيكون $\mu\,\mathbf{e}-\mathbf{p}(x)$ له مقلوباً أيضاً.

والآن لنأخذ كثير الحدود:

$$\mathbf{q}(t)\ =\mu-\mathbf{p}(t)$$

والتي يمكن تحليلها وفقاً للشكل الآتي:

$$\mathbf{q}(t)=k\,(\lambda_1-t)\,(\lambda_2-t)\ ....\ (\lambda_n-t)$$

علماً أن k ثابت و $\lambda_1,\lambda_2\ ,......,\lambda_n$ هي أصفار كثيرة الحدود **q**.

ومن ثم سيكون لدينا:

$$\mu\,\mathbf{e}-\mathbf{p}(x)=k\,(\lambda_1\,\mathbf{e}-x)\,(\lambda_2\,\mathbf{e}-x)\ ....\ (\lambda_n\,\mathbf{e}-x)$$

وسيكون لكل المعاملات $(\lambda_i\,\mathbf{e}-x)$ مع $i\in \mathrm{N}$ مقلوباً، وهكذا سيكون لـ $\mu\,\mathbf{e}-\mathbf{p}(x)$ مقلوباً أيضاً، ولذلك فإن واحد على الأقل من الأصفار λ_i لـ **q** سيكون موجوداً في طيف x مع $\mathbf{p}(\lambda_i)=\mu$ ولذلك سيكون:

$$\mu\in\left\{\mathbf{p}(\lambda)\quad ;\ \lambda\in \mathbf{sp}_{\mathrm{A}}\ (x)\right\}$$

٢- لدينا $\theta\notin \mathbf{sp}_{\mathrm{A}}\ (x)$ ولذلك فالعلاقة:

$$\mathbf{sp}_{\mathrm{A}}\ (x^{-1})=\left\{\frac{1}{\lambda}\qquad ;\lambda\in \mathbf{sp}_{\mathrm{A}}\ (x)\right\}$$

تنتج بوضوح من العلاقة:

$$\lambda\,\mathbf{e}-x\ =-x\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\mathbf{e}-x^{-1}\right)$$

وبهذا يتم المطلوب.

٢-١٥- مبرهنة:

ليكن A هو C^*- **جبر** عندئذ سيكون ما يلي محققاً:

1ً- لدينا $\mathbf{sp}_A\ (x^*) = \overline{\mathbf{sp}_A\ (x)}$.

2ً- إذا كان u واحدياً فإنه سيكون $|\lambda| = 1$ من أجل كل $\lambda \in \mathbf{sp}_A\ (u)$.

3ً- إذا كان x مرافق لنفسه (أو مترافق ذاتياً) self adjoint فإن $\mathbf{sp}_A\ (x)$ سيكون حقيقياً.

البرهان: من أجل الفقرة:

1ً- بما أن $\mathbf{e} = \mathbf{e}^*$ ولدينا $x\,y = y\,x = \mathbf{e}$ إذا وفقط إذا كان:

$$x^*\,y^* = y^*\,x^* = \mathbf{e}$$

ولذلك يكون $(\lambda\,\mathbf{e} - x)$ قابلاً للقلب إذا وفقط إذا كان:

$$(\lambda\,\mathbf{e} - x)^* = \left(\overline{\lambda}\,\mathbf{e} - x^*\right)$$

قابلاً للقلب، وهذا يثبت أن:

$$\mathrm{sp}_A\ (x) = \mathrm{sp}_A\ \left(x^*\right)$$

2ً- إذا كان u واحدياً فإنه سيكون لدينا:

$$\|u\|^2 = \left\|u\,u^*\right\| = \|\mathbf{e}\| = 1$$

والآن إذا كان $\lambda \in \mathbf{sp}_A\ (u)$ عندئذ بحسب المبرهنة (٢-١٣) سيكون لدينا:

$$|\lambda| \le \|u\| = 1$$

ولكن u^* هو واحدياً أيضاً ومن ثم بحسب الفقرة الثانية مـن المبرهنـة (٢-١٤) ينتج لدينا أن $\lambda^{-1} \in \mathbf{sp}_A\ \left(u^*\right)$ وبالتالي سينتج أن $\left|\lambda^{-1}\right| \le 1$، ومنـه يجـب أن يكون $|\lambda| = 1$.

3ً - لنفترض أن $x = x^*$ عندئذ يجب أن نبين أنه إذا كـان $\lambda = \alpha + \mathbf{i}\beta$ مع $\beta \neq 0$ (الجذر التخيلي غير معدوم) فإن $\lambda\,\mathbf{e} - x$ سيكون له مقلوب فـي A أيضاً، ولتبيان ذلك نلاحظ أولاً أن:

$$(\alpha + \mathbf{i}\beta)\mathbf{e} - x = \beta\left(\frac{\alpha\,\mathbf{e} - x}{\beta} + \mathbf{i}\,\mathbf{e} \right)$$

وكذلك:

$$y = \frac{\alpha\,\mathbf{e} - x}{\beta}$$

مرافق لنفسه. لذلك يكفي أن نبين أن $y + \mathbf{i}\,\mathbf{e}$ يمكن قلبه (عكسه) من أجل عنصر y مرافق لنفسه.

من أجل ذلك لنفترض العكس، أي $-\mathbf{i} \in \mathbf{sp}_{A}\ (y)$ عندئذٍ من أجل أي γ سيكون لدينا:

$$\gamma + 1 \in \left\{ \gamma + \mathbf{i}\,t \ \ ; t \in \mathbf{sp}_{A}\ \ (y) \right\} \ \ = \mathbf{sp}_{A}\ \ (\gamma + \mathbf{i}\,y)$$

ولذلك بحسب المبرهنة (٢-١٣) يكون لدينا:

$$|\,\gamma + 1\,| \leq \|\,\gamma + \mathbf{i}\,y\,\|$$

وبأخذ γ عدداً حقيقياً فعندئذ الشرط C^* يبين أن:

$$(\gamma + 1)^2 \leq \|\,\gamma + \mathbf{i}\,y\,\|^2 = \left\|\,(\gamma + \mathbf{i}\,y)^* (\gamma + \mathbf{i}\,y)\,\right\|^2$$
$$= \left\|\,\gamma^2 + y^2\,\right\| \leq \gamma^2 + \|\,y\,\|^2$$

وهذا يقتضي أن يكون $1 + 2\gamma \leq \|\,y\,\|^2$ من أجل أي عدد حقيقي γ، وهـذا غيـر ممكن (مستحيل) ولذلك يجب أن يكون $-\mathbf{i} \notin \mathbf{sp}_{A}\ (y)$ ، ومن ثـم الطيـف لأي عنصر مرافق لنفسه سيكون حقيقياً.

التوطئة الآتية تعرض لنا نتيجة بسيطة على طيف الجداء.

٢-١٦- توطئة:

ليكن ليكن A هو C^*- **جبر**، ولنأخذ y , x ∋ A عندئذٍ من أجل $\lambda \neq 0$
سيكون ما يلي محققاً:

$$\lambda \in \mathbf{sp}_{\mathsf{A}} \; (x\,y) \;\Leftrightarrow\; \lambda \in \mathbf{sp}_{\mathsf{A}} \; (y\,x)$$

الإثبات:

إذا كانت $\lambda \neq 0$ و $\lambda \in \mathbf{sp}_{\mathsf{A}} \; (x\,y)$ ، فعندئذ يمكن بتنفيذ الضرب المباشر إثبـات أن $\lambda^{-1}\mathbf{e} + \lambda^{-1} y \left(\lambda\mathbf{e} - x\,y\right)^{-1} x$ هـو مقلـوب $\lambda\mathbf{e} - y\,x$ ، وهكـذا سيكون $\lambda \in \mathbf{sp}_{\mathsf{A}} \; (y\,x)$.

٢-١٧- تعريف (نصف قطر الطيف لعنصر):

ليكن A هو C^*- **جبر** عندئذ نصف قطر الطيف لعنصر x ∋ A (والذي سنرمز له بـ $\mathsf{R}\,(x)$) يعرفّ من خلال العلاقة الآتية:

$$\mathsf{R}\,(x) := \mathbf{max}\left\{ |\,\lambda\,| ; \lambda \in \mathbf{sp}_{\mathsf{A}} \; (x) \right\}$$

٢-١٨- ملاحظة:

باستخدام برهان المبرهنة (٢-١٣) نجد أن $\mathsf{R}\,(x) \leq \| x \|$.

المبرهنة الآتية تعطينا صيغة لحساب نصف قطر الطيف لعنصر x ∋ A .

٢-١٩- مبرهنة (صيغة حساب نصف قطر الطيف):

ليكن A هو C^*- **جبر** عندئذ سيكون ما يلي:

$$\mathsf{R}\,(x) = \lim_{n \to \infty} \left\| x^n \right\|^{\frac{1}{n}}$$

الإثبات:

لدينا A هو C^*- **جبر** ، ولنأخذ الدالة:

$$h(x) := \lambda \cdot \varphi\left((\lambda \mathbf{e} - x)^{-1}\right) \qquad ; \ \varphi \in A' , \lambda \in C$$

عندئذ ينتج من برهان المبرهنة (٢-١٣) أن الدالة:

$$f(\lambda) = \varphi\left((\lambda \mathbf{e} - x)^{-1}\right)$$

هولومورفية على $\mathbf{sp}_A(x)$ ، وكذلك على المجموعة $\{\lambda \ ; \ |\lambda| > \mathbf{R}(x)\}$.

والآن لنقم باستخدام التحويل $z = \frac{1}{\lambda}$ ولنعرف الدالة:

$$g(z) := \frac{1}{z}\varphi\left(\left(\frac{1}{z}\mathbf{e} - x\right)^{-1}\right) = \varphi\left((\mathbf{e} - z x)^{-1}\right)$$

عندئذٍ ستكون الدالة g هولومورفية في المجموعة:

$$\left\{ z \ ; \ |z| < \frac{1}{\mathbf{R}(x)} \right\}$$

ولنقم بتعيين نشر تايلور للدالة g . ولأجل ذلك نجد أن من أجل $|z| < \frac{1}{\|x\|}$ أنـه لدينا بحسب التوطئة (٢-١٠) ما يلي:

$$(\mathbf{e} - z x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n x^n$$

وبما أن الدالة φ مستمرة فإنه يمكننا أن نكتب:

$$g(z) = \varphi\left((\mathbf{e} - z x)^{-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \varphi\left(x^n\right)$$

نعلم أن نشر متسلسلة القوى g محقق من أجل $|z| < \frac{1}{\|x\|}$ ، وبما أن الدالة g هولوموفيك على القرص الكبير $\left\{ z \ ; \ |z| < \frac{1}{\mathbf{R}(x)} \right\}$ ، وبما أن نشر تايلور لدالة هلومورفية وحيداً، فإن النشر السابق سيكون محقّقاً من أجل $|z| < \frac{1}{\mathbf{R}(x)}$.

لذلك فمن أجل $|z| < \dfrac{1}{\mathbf{R}(x)}$ سيكون لدينا:

$$\lim_{n \to \infty} z^n \varphi\left(x^n\right) = 0$$

في الحقيقة يكفينا الآن معرفة إن كانت المتتالية $\left(z^n \varphi\left(x^n\right)\right)$ محدودة، ومن اجـل ذلك نعلم أنه من أجل كل $\varphi \in A'$ يوجد ثابت K_φ بحيث يكون:

$$\left| \varphi\left(z^n x^n\right) \right| < K_\varphi \qquad ; \forall n \in \mathbb{N}$$

ومن بحسب (مبرهنة المحدودية المنتظمة) ينتج أنه يوجد ثابت K مستقل عن φ بحيث أنه من أجـل كـل $n \in \mathbb{N}$ وأي z محقّقـاً لـ $|z| < \dfrac{1}{\mathbf{R}(x)}$ و $\left\| z^n x^n \right\| < K$ سيكون لدينا:

$$\left\| x^n \right\|^{\frac{1}{n}} < \frac{K^{\frac{1}{n}}}{|z|}$$

والتي ينتج عنها أن:

$$\left\| x^n \right\|^{\frac{1}{n}} < K^{\frac{1}{n}} \mathbf{R}(x)$$

وكذلك:

$$\overline{\sup} \left\| x^n \right\|^{\frac{1}{n}} \leq \mathbf{R}(x) \qquad ; \forall n \in \mathbb{N}$$

من جهةٍ أخرى فإذا كان $\lambda \in \mathbf{sp}_A(x)$ فعندئذ من أجل كـل $n \in \mathbb{N}$ سـيكون بحسب الفقرة الأولى من المبرهنة (٢-١٥) لدينا $\lambda^n \in \mathbf{sp}_A(x)$ ومن المبرهنـة (٢-١٣) سينتج لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ما يلي:

$$|\lambda| \leq \left\| x^n \right\|^{\frac{1}{n}}$$

أي أنّه بأخذ الـ maximum فوق كل القيم $\lambda \in \mathbf{sp}_A(x)$ ينتج لدينا:

$$\mathbf{R}(x) \le \left\| x^n \right\|^{\frac{1}{n}} \qquad ; \forall\ n \in \mathrm{N}$$

وبالتالي نستنتج مما سبق أن:

$$\inf_{n\to\infty} \left\| x^n \right\|^{\frac{1}{n}} \ge \underline{\lim}_{n\to\infty} \left\| x^n \right\|^{\frac{1}{n}} \ge \mathbf{R}(x) \ge \overline{\sup}_{n\to\infty} \left\| x^n \right\|^{\frac{1}{n}}$$

لاحظ أن وجود النهاية ليس جزءاً من الفرضية في المبرهنة وإنّما موجود في البرهان السابق.

٢-٠-٢- نتيجة:

ليكن A هو C^*- **جبر**، عندئذ من أجل x ∋ A عنصر طبيعي سـيكون ما يلي محقّقاً:

$$\| x \| = \mathbf{R}(x)$$

الإثبات:

إذا كان $y = y^*$ فإنّه حسب الشرط C^* سيكون لدينا:

$$\left\| y^2 \right\| = \| y \|^2$$

وبتكرار هذه العملية لـ m سينتج لدينا ما يلي:

$$\left\| y^{2^m} \right\| = \| y \|^{2^m}$$

وهكذا يمكننا أن نكتب:

$$\| y \| = \lim_{m\to\infty} \left\| y^{2^m} \right\|^{\frac{1}{2^m}} = \mathbf{R}(y)$$

الآن من أجل عد د طبيعي x ، وباستعمال البرهان السابق من أجـل $x x^*$ سيكون لدينا ما يلي:

$$\|x\|^2 = \|x x^*\| = \mathbf{R}(x x^*) = \lim_{n\to\infty} \left\| (x x^*)^n \right\|^{\frac{1}{n}}$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \left\| x^n \right\|^{\frac{1}{n}} \cdot \left\| (x^*)^n \right\|^{\frac{1}{n}} = (\mathbf{R}(x))^2 \le \|x\|^2$$

وبالتالي فإن المساواة $\|x\| = \mathbf{R}(x)$ صحيحة، وبهذا يتم المطلوب.

فيما يلي سنهتم الآن بالطيف بالنسبة إلى جبـور جزئيـة، ولأجـل ذلـك ليكن A جبر باناخ و $B \subseteq A$ جبر جزئي عندئذ لكي يصبح هذا الجبر الجزئي هو جبر باناخ يجب أن يكون تاماً، وبما أن A تام فإن هذا يكافئ القـول إنـه مغلق، فلو رمزنا لحدودية مجموعة $S \subseteq A$ بـ ∂S ولمتممتهـا بـ S^c فعندئذ سيكون لدينا: $\partial S = \overline{S} \cap \overline{S}^c$

٢-٢١- مبرهنة:

ليكن A جبر باناخ و $B \subseteq A$ جبر جزئي مغلق ويحوي عنصر الوحدة للجبر A عندئذ سيكون لدينا ما يلي محقّقاً:

$$\partial \mathbf{sp}_B(x) \subseteq \mathbf{sp}_A(x) \subseteq \mathbf{sp}_B(x)$$

الإثبات:

إذا كان $x \in B$ و بفرض أن العنصر $\lambda\mathbf{e} - x$ ليس له مقلوب في A فعندئذ لن يملك مقلوباً له في B أيضاً ، وهذا يبين أن:

$$\mathbf{sp}_A(x) \subseteq \mathbf{sp}_B(x)$$

والآن نعلم أن:

$$\partial \mathbf{sp}_B(x) = \overline{\mathbf{sp}_B(x)} \cap \overline{\mathbf{res}_B(x)} = \mathbf{sp}_B(x) \cap \overline{\mathbf{res}_B(x)}$$

عندئذ بأخذ $\lambda \in \partial \mathbf{sp}_B(x)$ فإنه ستوجد متتالية (λ_n) عناصـرها مـن $\mathbf{res}_B(x)$ بحيث يكون $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$ ، فإذا كـان $\lambda \notin \mathbf{res}_A(x)$ فعندئـذ

$(\lambda \mathbf{e} - x)^{-1}$ سيكون موجوداً في A ، وبالتالي اعتماداً على استمرارية المقلوب (بحسب الفقرة الثانية من (٢-١٢)) ستكون المتتالية $\left((\lambda_n \mathbf{e} - x)^{-1}\right)$ متقارب من $(\lambda \mathbf{e} - x)^{-1}$ في A ، وبما أن $\left((\lambda_n \mathbf{e} - x)^{-1}\right)$ هي متتاليـة كوشـي لعناصـر من B فإنّها ستتتقارب في B من النهاية $(\lambda \mathbf{e} - x)^{-1}$ نفسها، وهذا يتناقض مـع فرضنا القائل إن $\lambda \in \partial \mathbf{sp}_{\mathrm{B}}(x)$ ، وبهذا يتم المطلوب.

٢-٢٢- نتيجة:

من أجل $x \in$ B سيكون لدينا:

$$\mathbf{R}_{\mathrm{B}}(x) = \mathbf{R}_{\mathrm{A}}(x)$$

الإثبات:

تنتج مباشرة من النتائج السابقة أو من المبرهنة (٢-٢١).

٢-٢٣- نتيجة:

إذا كان $x \in$ B و $\mathbf{sp}_{\mathrm{B}}(x)$ له داخلية خالية، فعندئذ سيكون:

$$\mathbf{sp}_{\mathrm{B}}(x) = \mathbf{sp}_{\mathrm{A}}(x)$$

الإثبات:

إذا كانت داخلية المجموعة $\mathbf{sp}_{\mathrm{B}}(x)$ خالية، فعندئذ سيكون:

$$\partial \mathbf{sp}_{\mathrm{B}}(x) = \mathbf{sp}_{\mathrm{B}}(x)$$

والآن، إذا كـان A و B جبـرين فعندئـذ سـيكون الهومومـورفيزم homomorphism:

$$\pi : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$$

هو تطبيق يحافظ على التراكيب الجبرية، فإذا كان كل من A و B هو*- **جبر** و π يحافظ على الالتفاف فعندئذ يـدعى π بـ *-هومومـورفيزم، وإذا كـان

لـ A عنصر وحدة $\mathbf{e}$ فمن السهل أن نرى أن $\pi(\mathbf{e})$ هو عنصر الوحـدة علـى مدى التطبيق π (في الحقيقة ،إذا كان B جبر منظم فـأن $\pi(\mathbf{e})$ هـو عنـصر الوحدة على غلاقة مدى التطبيق π).

وهكذا ودون المساس بعمومية الدراسة لفرض أنه عند وجود عنصر وحدة فإن جميع الهومومورفيزمات تحافظ على عنصر الوحدة، وسوف نعتمد على هـذه الفرضية.

٢-٢٤- مبرهنة:

إذا كـان كـل مـن A و B هـو C^*- **جبر** مـع عنـصر وحـدة و $\pi : \mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{B}$ هو *-هومومورفيزم فإن:

$$\| \pi(x) \|_{\mathsf{B}} \le \| x \|_{\mathsf{A}}$$

وعلى وجه الخصوص سيكون π مستمراً.

الإثبات:

إذا كان لـ $y \in \mathsf{A}$ مقلوباً في A فإن $\pi\left(y^{-1}\right)$ هـو مقلـوب $\pi(y)$ في B، ومن ثم بتطبيق هذا على $\lambda\mathbf{e} - x$ نجد أن:

$$\mathbf{res}_{\mathsf{A}}(x) \subseteq \mathbf{res}_{\mathsf{B}}(\pi(x)) \qquad ; \forall x \in \mathsf{A}$$

ولذلك سيكون لدينا:

$$\mathbf{R}_{\mathsf{B}}(\pi(x)) \le \mathbf{R}_{\mathsf{A}}(x) \le \| x \| \qquad (1)$$

ولكن في الـ C^*- **جبر** B لدينا ما يلي:

$$\| \pi(x) \|_{\mathsf{B}}^2 = \left\| \pi(x) \left(\pi(x) \right)^* \right\|_{\mathsf{B}} = \left\| \pi(x)\, \pi(x^*) \right\|_{\mathsf{B}} \left\| \pi(x x^*) \right\|_{\mathsf{B}}$$

وبما أن $\pi(x x^*)$ هو مرافق لنفسه في B، فإنه باستخدام النتيجة (٢-٢٢) ينتج لدينا:

$$\| \pi(x) \|_{\mathsf{B}}^2 = \mathbf{R}_{\mathsf{B}}\left(\pi(x x^*)\right)$$

والآن بتبديل x بـ xx^* في العلاقة (1) واستعمال ما سبق نجد ما يلي:

$$\| \pi(x) \|_B^2 = R_B \| \pi(xx^*) \|_B \leq \| x x^* \|_A \| x \|_A$$

٢-٢٥- ملاحظة:

لقد استعملنا في الإثبات السابق الشرط C^* فقط من أجل مدى الجبر B ، ولكن المبرهنة تبقى محققة مع شرط أضعف على A. وهو أن يكون الجبر A هو جبر باناخ مع التفاف إيزومتري.

٢-٢٦- نتيجة:

إذا كان $\pi : A \longrightarrow B$ *-هومومورفيزم فإنه سيكون إيزومتري، وعلى وجه الخصوص فإنه يوجد على الأكثر نظيم يجعل جبر باناخ مع التفاف إيزومتري هو C^*- جبر.

٢-٢٧- ملاحظة:

النتيجة السابقة صحيحة أيضاً من أجل الجبور التي لا تملك عنصر وحدة.

٢-٢٨- مبرهنة:

ليكن A هو C^*- جبر ، و $D \subseteq A$ هو *-جبر جزئي مغلق ويحوي عنصر الوحدة للجبر A نفسه، عندئذ سيكون لدينا ما يلي محقّقاً:

$$\mathbf{sp}_A \,(x) = \mathbf{sp}_D \,(x) \qquad ; \forall x \in D$$

الإثبات:

بما أن الطيف لعنصر مرافق لنفسه في C^*- جبر هو عدد حقيقي بحسب المبرهنة (٢-١٥)، فعندئذ تبين النتيجة (٢-٢٣) أن العناصر المرافقة لنفسها سيكون لها الأطياف نفسها في A و B.

الآن إذا كان $\lambda \in \mathbf{sp}_A \,(x)$ فإن كل من $\lambda \mathbf{e} - x$ ومرافقه سيكون له

مقلوبــاً فــي A ، وهكــذا فالعنــصر الــصفري 0 لا ينتمــي إلــى $\mathbf{sp}_{A}\left((\lambda \mathbf{e}-x)(\lambda \mathbf{e}-x)^{*}\right)$ ، وبما أن العنصر $(\lambda \mathbf{e}-x)(\lambda \mathbf{e}-x)^{*}$ مرافـق لنفسه فإنه سيكون له مقلوباً في D ، فلو رمزنا بـ y لهذا المقلوب لأصبح لدينا:

$$\mathbf{e}=(\lambda \mathbf{e}-x)(\lambda \mathbf{e}-x)^{*} y$$

وهذا يبين أن $(\lambda \mathbf{e}-x)$ له مقلوب من اليمين في D ، وبـشكل مـشابه سـيكون للعنصر $(\lambda \mathbf{e}-x)$ مقلوب من اليسار في D ، وبمناقشة جبرية مـشابهة نجـد أن $(\lambda \mathbf{e}-x)$ قابل للقلب، وهكذا فإن $\mathbf{sp}_{A}(x) \supseteq \mathbf{sp}_{D}(x)$ من أجل كل $x \ni D$.

إن الاحتواء المعاكس واضح، ومن ثم المساواة $\mathbf{sp}_{A}(x)=\mathbf{sp}_{D}(x)$ صحيحة.

الجبور بدون عنصر واحدة:

من المعروف أنه من أجل جبر معطى A ليس له عنصر وحدة يمكن بناء جبر A_1 مع عنصر وحدة **e** بحيث يكون الجبر A هو جبر جزئي مـن A_1 و الجبر A_1 يحتوي كل من الجبر A وعنصر الوحدة **e**. في الحقيقة هذه العمليـة تبني تطبيقاً من الجبر A في مثالية من A_1، وإذا كان A هو $C^{*}-$ **جبر** فإنّـه يمكن ضمان أن يكون A_1 هو $C^{*}-$ **جبر** أيضاً.

من وجهة نظر جبرية سيكون البناء المذكور أعلاه سهلاً. إذ إن A_1 يمكن أن يعرف على شكل مجموع مباشـر لـ A و C أي أن $A_1=A \oplus C$، علماً أن المجموع المباشر لـ A وC بني على الفضاء الخطي المعتاد.

إن الضرب في A_1 يعرف من خلال العلاقة الآتية:

$$(x, \lambda) \cdot(y, \mu)=(x \cdot y+\lambda \cdot y+\mu \cdot x, \lambda \cdot \mu)$$

من أجل أي $y,x \ni A$ وكل $\mu,\lambda \ni C$.

٢-٢٩- ملاحظات:

1ً- إن لـ A متطابق مع المجموعة $\{(x, 0) ; x \in A\}$.

2- لاحظ أن A هو مثالي في A_1، والعنصر $\mathbf{e}=(0,1)$ هـو عنـصر الوحدة للجبر A_1.

3- هناك طرق عدة لتعريف نظيم على A_1 لجعله جبر باناخ كأن نأخـذ النظيم:

$$\|(x\,,\,\lambda)\|=\|x\|+|\lambda|$$

4- علاوةً على ما سبق سيكون A_1 فضاء تاماً، ويحقّق شرط الـضرب لجبر باناخ، والمتمثل بتحقّق العلاقة $\|x\cdot y\|\le\|x\|\cdot\|y\|$، ولكّـن هـذا فقـط لا يجعل A_1 هو C^*- جبر، ولجعـل A_1 جبراً من النوع C^*- جبر سـنعرف النظيم على A_1 كما يلي:

$$\|(x\,,\,\lambda)\|_{\mathsf{A}_1}:=\sup_{y\le 1}\|x\,y+\lambda\,y\|_{\mathsf{A}}$$

علماً أن y اختيارياً من A (لاحظ أن الضرب بـ $(x\,,\,\lambda)$ هو مـؤثر خطي على المثالية A من A_1 ، وأن $\|(x\,,\,\lambda)\|_{\mathsf{A}_1}$ هو النظيم لهذا المؤثر، ومن ثم ينتج أن $\|\bullet\|_{\mathsf{A}_1}$ يحقّق شرط الضرب لنظيم جبر باناخ، أي أن:

$$\|(x\,,\,\lambda)\cdot(y\,,\,\mu)\|_{\mathsf{A}_1}\le\|(x\,,\,\lambda)\|_{\mathsf{A}_1}\cdot\|(y\,,\,\mu)\|_{\mathsf{A}_1}$$

وذلك من أجل كل $\lambda,\mu\in\mathsf{C}$, $x,y\in\mathsf{A}$.

الآن واعتماداً على التوطئة (٢-١٠) وبأخذ:

$$\|x\|_{\mathsf{A}}=\sup_{\|y\|\le 1}\|x\,y\|_{\mathsf{A}}$$

ينتج لدينا أن:

$$\|(x\,,\,0)\|_{\mathsf{A}_1}=\|x\|_{\mathsf{A}}$$

والتي تضمن لنا أن يكون هذا التطبيق من A في A_1 إيزومترياً.

والآن لتحقيق الشرط C^* نجد ما يلي:

$$\|(x,\lambda)\|^2_{A_1} = \sup_{y\le 1} \|xy+\lambda y\|^2_A = \sup_{y\le 1} \left\|(y^* x^* + \bar{\lambda} y^*)(xy+\lambda y)\right\|_A$$
$$= \sup_{y\le 1} \left\|(y^*, 0)(x,\lambda)^*(x,\lambda)(y,0)\right\|_{A_1}$$
$$\le \sup_{y\le 1} \left\|(y^*, 0)\right\|_{A_1} \left\|(x,\lambda)^*(x,\lambda)\right\|_{A_1} \|(y,0)\|_{A_1}$$
$$= \left\|(x,\lambda)^*(x,\lambda)\right\|_{A_1}$$

وبحسب التوطئة (٢-١٠) فإن النظيم $\|\bullet\|_{A_1}$ يحقّق الشرط C^* .

الآن بقي علينا إثبات أن A_1 هو فضاء تام.

من أجل ذلك سنفترض أن A ليس له عنصر وحدة، ولتكن $((x_n,\lambda_n))$ متتالية كوشي في A_1، ولنبين أولاً أن (λ_n) هي متتالية محدودة على النحو الآتي:

من أجل ذلك لنفرض العكس، أي أنه توجد متتالية جزئية منها بحيث يكون:

$$|\lambda_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

ومنه سيكون لدينا:

$$\left\|\frac{x_m}{\lambda_m} - \frac{x_n}{\lambda_n}\right\|_A = \sup_{\|y\|\le 1} \left\|\left(\frac{x_m}{\lambda_m} - \frac{x_n}{\lambda_n}\right) y\right\|$$
$$= \sup_{\|y\|\le 1} \left\|\left(\frac{x_m}{\lambda_m} y + y\right) - \left(\frac{x_n}{\lambda_n} y + y\right)\right\|$$
$$\le |\lambda_m|^{-1} \|(x_m,\lambda_m)\|_{A_1} + |\lambda_n|^{-1} \|(x_n,\lambda_n)\|_{A_1}$$

وبما أن $((x_n,\lambda_n))$ هي متتالية كوشي في A_1 فإنها ستكون محدودة، وبمـا أن $|\lambda_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ فإنه سينتج لدينا أن $\left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right)$ هي متتالية كوشي في A، ومـن ثم سوف يوجد عنصر z من A بحيث تتقارب المتتالية $\left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right)$ من z .

ولكن من أجل أي $y \in$ A لدينا:

$$\left\| \frac{x_n}{\lambda_n} y + y \right\| = |\lambda_n|^{-1} \left\| (x_n,\lambda_n) \right\|_{A_1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ومن ثم سيكون $zy+y=0$ ، وهذا يعني أن الجبر A يملك عنصر وحدة $-z$، وهذا يناقض الفرضية التي انطلقنا منها (من أن الجبر A لا يملك عنصر وحدة).

إذن فالمتتالية (λ_n) محدودة، ومن ثم توجد متتالية جزئية منها متقاربة من قيمة ولتكن λ. عندئذ باستخدام العلاقة الآتية:

$$\begin{aligned} \| x_n - x_m \|_A &= \left\| (x_n,\lambda)-(x_m,\lambda) \right\|_{A_1} \\ &= \left\| (x_n,\lambda_n)+(0,\lambda-\lambda_n)-(x_m,\lambda_m)-(0,\lambda-\lambda_m) \right\|_{A_1} \\ &\le \left\| (x_n,\lambda_n)-(x_m,\lambda_m) \right\|_{A_1} + |\lambda-\lambda_n| + |\lambda-\lambda_m| \end{aligned}$$

ينتج لدينا ينتج أن (x_n) هي متتالية كوشي في A ، وبالتالي توجـد متتاليـة جزئية منها متقاربة من عنصر $x \in$ A ، ومنه سينتج لدينا أن المتتالية الجزئيـة $(\lambda_n x_n)$ ستكون متقاربة من العنصر $(x,\lambda) \in A_1$، وبهذا يتم المطلوب.

٢-٣٠- تعريف (التمثيل):

لنأخذ A هو C^*- جبر ، و(B (H) (فضاء المؤثرات المحدودة علـى فضاء هيلبرت H) والمحقّق لتعريف الـ C^*- جبر ، ولنأخذ:

$$\xi : A \longrightarrow B(H)$$

تطبيقاً محققاً لما يلي:

1) $\xi(\lambda\cdot x+\mu\cdot y)=\lambda\cdot\xi(x)+\mu\cdot\xi(y) \quad ; \forall x,y\in \mathrm{A}$

2) $\xi(x\cdot y)=\xi(x)\cdot\xi(y) \quad ; \forall x,y\in \mathrm{A}$

3) $\xi(x^{*})=(\xi(x))^{*} \quad ; \forall x\in \mathrm{A}$

4) $\xi(\mathbf{e})=\mathbf{I}$

عندئذ يدعى هذا التطبيق **تمثيلاً** لـ A، علماً أن $\mathbf{I}$ هو عنـصر الوحـدة فـي $B(H)$.

٢-٣١- مبرهنة:

ليكن $\xi:\mathrm{A}\longrightarrow B(H)$ تمثيلاً لـ A، و ϑ هو عنصر الواحدة فـي فضاء هيلبرت H ، ولنأخذ ω دالة عقدية معرفةً على A كما يلي:

$$\omega:\mathrm{A}\longrightarrow \mathrm{C} \quad ; A\mapsto \omega(A):=\langle \xi(A)\vartheta , \vartheta\rangle$$

عندئذ نجد أن هذه الدالّة تُحقق ما يلي:

1ً- ω هي دالية خطية.

2ً- لدينا $\omega(x\cdot x^{*})\geq 0$ من أجل كل $x\ni \mathrm{A}$.

3ً- لدينا $\omega(\mathrm{e})=1$.

4ً- الدالة ω مستمرة.

5ً- لدينا $\|\omega\|=1$.

الإثبات:

في الواقع أن الشرط الأول والثالث واضحان ، ولإثبات الشرط الثاني نأخذ $x\ni \mathrm{A}$ عنصراً كيفياً فنجد ما يلي:

$$\omega\left(x^{*}\cdot x\right)=\left\langle \xi(x^{*}\cdot x)\,\vartheta,\,\vartheta\right\rangle$$
$$=\left\langle \xi(x^{*})\cdot\xi(x)\,\vartheta\,,\,\vartheta\right\rangle$$
$$=\|\,\xi(x)\,\vartheta\|^{2}\geq 0$$

أما الشرط الرابع و الخامس ينتجان عن المبرهنة (٢-١٣) حيث لدينا :

$$\|\,\xi(x)\,\|\leq\|\,x\,\|$$

٢-٣٢- ملاحظات:

1ً- الدالية $\omega : A \longrightarrow C$ والمحققة للفقرات الخمس في المبرهنة السابقة تُدعى دالة حالة لـ A.

2ً- يقال عن الدالية الخطية $\omega : A \longrightarrow C$ إنها موجبة إذا كانت العلاقة الآتية محققةً من أجل كل $x \in A$:

$$\omega\left(x^{*}\cdot x\right)\geq 0$$

الفصل الثالث

تطبيقات في الميكانيك الإحصائي

تمهيد:

لقد قام الميكانيك الإحصائي Statistical Mechanics في البداية بتقديم حلول جزئية لمسائل متعلقة ببنية الذرة وذلك من خلال تركيب قوانين الحركة للميكانيك التقليدي Quantum Mechanics Classical Mechanics، وبذلك يكـون الميكانيـك الإحصائي قد احتل مركزاً متقدماً فـي مجـال الفيزيـاء النظريـة Theoretical Physics، والذي يتبنى بالدرجة الأولى الميكانيك التقليدي والكوانتي معاً لـشرح ظواهر الحركة في بنية المادة، وهذا بدوره أدى إلى فهم أفضل لمفهوم الحرارية (الترموديناميك) Thermodenamic (انظر [3] و [4]).

في الواقع إن الحل التام للمسائل المطروحة بشأن بنية المادة يتطلب نظرية يمكنها من تعيين سلوك الأنظمة الفيزيائية الماكروسكوبية Macroscopic (ولـيس الميكروسكوبية Microscopic فقط) لدى تغيرات زمنية كيفية لحالات هذه الأنظمة.

الآن لنعد قليلاً إلى الميكانيك الإحصائي من أجل توضيح أهمية هذا الفـرع من الفيزياء النظرية.

من المعلوم أن الميكانيك التقليدي (الكلاسيكي) والفيزياء الذرية وكذلك ميكانيك الكم والفيزياء النووية تتعامل مع جسيم أو اثنان أو بضعة جسيمات فقط، ومن ثم يصبح التعامل مع أنظمة تحوي عدداً كبيراً من الجسيمات أمراً شاقاً إن لم يكن غير ممكناً وفقاً للميكانيك التقليدي وميكانيك الكم وبقية تلك الاختصاصات المذكورة أعلاه (انظر [4] و [10]).

من هنا جاءت أهمية الميكانيك الإحصائي في دارسة الأنظمة لجسيمات تحوي عدداً كيفيا من الجسيمات ومن هذه الأنظمة (على سبيل المثال) أنظمة

الجسيمات التي تحقّق شرط بوزي– أينشتاين والتي تُدعى بالأنظمة البوزونية Boson Systems ومنها جسيمات α ، نوى الهليوم ونوى الغاز المثالي، إذ إن هذه الأنظمة يندر وجودها بأعداد قليلة في الطبيعة وغالباً تحتوي على عدد كبير جداً من الجسيمات قد يكون غير منته حيث يمكن للميكانيك الإحصائي أن يتعامل مع مجموعات كثير تحتوي على أعداداً كيفية من الجسيمات بآن واحد، لا بل أكثر من ذلك استطاع الميكانيك الإحصائي أن يجيب على أسئلة كثيرة تتعلق بتجمعات ضخمة من الجسيمات عجز الميكانيك التقليدي من الإجابة عليها (انظر [1] و[3] و[4] و[10])، فعلى سبيل المثال هناك سؤال تقليدي في الميكانيك التقليدي حول مسألة التطور الزمني التي تقول: بفرض أن المواضع والسرع لكل الجسيمات معلومة الآن، عندئذ أين ستكون هذه الجسيمات في المستقبل وما هي سرعتها. إن الإجابة على هذا التساؤل ليست تامة حتى من أجل ثلاثة جسيمات فقط عندما نستخدم الميكانيك التقليدي وذلك بسبب قوى التجاذب بين هذه الجسيمات. إلا أن الميكانيك الإحصائي استطاع أن يعطي إجابات شافية وكاملة تقريباً حول مثل هذه المسائل وذلك بسبب اعتماد الميكانيك الإحصائي على نظرية الاحتمالات.

وهناك أسئلة كثيرة أخرى يصعب على الميكانيك التقليدي الإجابة عليها منها على سبيل المثال لا الحصر:

1- كيف يتغير الضغط بتغير الحجم ؟

2- كيف تتغير الحرارة لدى إضافة جسيمات جديدة ؟

3- ما هو متوسط المسافة بين الجسيمات ؟

4- ما هو احتمال تواجد جسيمين تفصل بينهما مسافة محددة ؟

ومن هنا جاء الميكانيك الإحصائي كوسيلة فعالة لدراسة حركة وتحريك الجسيمات، لا بل أكثر من ذلك أثبت أن الميكانيك الإحصائي قادر على دراسة المنظومات الكونية للتجمعات الكبيرة (مثل المجرات) على نحو مماثل لما تم من أجل المجتمعات الميكروسكوبية.

دراسة الحالات المتوازنة في الميكانيك الإحصائي:

فيما يلي نعرض أحد التطبيقات الهامة للميكانيك الإحصائي مستندين في ذلك على المراجع ([1] و[3] و[4] و[7] و[8] و[9]).

في الواقع هناك طرائق عديدة يعتمدها الميكانيك الإحصائي لدراسة المنظومات الميكروسكوبية والماكروسكوبية منها طريقة تعتمد على مناقشة النهايات الترموديناميكية وهي طريقة شاقّة ومعقّدة ولكنّها مفيدة عندما يريد المرء التعامل مع الشروط الحدية للحيز الحاوي على الجسيمات.

الطريقة الأخرى في دراسة الميكانيك الإحصائي يقوم على المفهوم الجبري، وفي هذه الطريقة يحاول المرء إظهار الصفات المميزة ويصنف الحالات المتوازنة للأنظمة غير المنتهية على أنّها دوال حالة معرفة على C^*- **جبر** مختار بشكل مناسب، وعناصر الـ C^*- **جبر** هنا تمثل الملحوظات الكيناميتية (الحركية) للجسيمات، وذلك لأنّه يتم تمثيل كل ملحوظة فيزيائية متعلقة بالجسيم بمؤثر خطي محدود **A** معرف فوق فضاء هلبرت لكل الحالات ψ ومن أجل كل الطاقات الممكنة وكل الأعداد للجسيمات لنظام منته. أما الـ C^*- **جبر** المعتمد (والذي يختار بشكل مناسب ونرمز له بـ $\mathcal{A}$) فإنّه يختار عادة بحيث يحقّق تعريف جبر نيويمان Von Neumann algebra والذي هو C^*- **جبر** جزئي من $\mathcal{A}$ يكون فيه $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ من أجل أي عنصرين (مؤثرين خطين) $\mathbf{B},\mathbf{A} \ni \mathcal{A}$، وتبرير ذلك هو أنّه إذا أخذ قياسين فيزيائيين **A** ومن ثم **B** الآن وبعد مدة زمنية وتحت الشروط نفسها التي أخذ بها القياسين B ومن ثم A ، فإن النتيجة يجب أن لا تتغير. بمعنى آخر إن عناصر الـ C^*- **جبر** المختار للدراسة يجب أن يحقّق خاصية الكموتانت (الخاصة التبديلية، انظر [16]).

أما بخصوص دوال الحالة Function States فإن أكثرها شهرة وأهمها هي تلك الحالات التي توافق الحالات المتوازنة Equilibrium States لأنظمة الجسيمات التي يعبر عنها بقانون جيبس الكبير وذلك على النحو الآتي.

ليكن H فضاء هيلبرت لدوال الحالة من أجل كل الطاقات الممكنة وكل أعداد الجسيمات لنظام منته، ولنأخذ **H** مؤثراً هاملتونيا مترافق ذاتياً وكذلك **N** مؤثراً عددياً هاملتونياً عندئذ دالة الحالة المتوازنة (قانون جيبس الكبير) يعرف كدالة $\omega_{\beta,\mu}$ فوق(B (H (فضاء المؤثرات الخطية المحدودة على H) من خلال العلاقة الآتية:

$$\omega_{\beta,\mu}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{tr}_{\mathsf{H}}\ (e^{-\beta\,\mathbf{K}}\ \mathbf{A})}{\mathbf{tr}_{\mathsf{H}}\ (e^{-\beta\,\mathbf{K}})}$$

علماً أن $\mathbf{K} = \mathbf{H} - \mu\,\mathbf{N}$ مع $\beta, \mu \in \mathsf{R}$ وبحيث يكون $e^{-\beta\,\mathbf{K}}$ مؤثراً من نوع صف الأثر Trace Class Operator (أو ما يعرف باسم مؤثر نووي Nuclear Operator)، وأما **H** فهو مؤثر نصف محدود من الأدنى، وتكون خاصية صف الأثر له صحيحة من أجل قيم $\beta > 0$ فقط (انظر [1] و [2] و [3]).

إن الوسيط β هو مقلوب الحرارة للنظام، وتربطه بدرجة الحرارة المطلقة T العلاقة $\beta = \dfrac{1}{\kappa \cdot T}$ ، علماً أن κ هو ثابت بولتسمان ويساوي:

$$\kappa = 1.380 \times 10^{-23}\ \mathbf{J / k \cdot s}$$

مع **J** يرمز لـ الجول و **k** يرمز لـ الكليفن وأخيراً **s** للثانية.

وأما μ فإنه يمثل الكمون الكيميائي (الطاقة الكامنة الكيميائية) للنظام.

إن مؤثر صف الأثر (المؤثر النووي (انظر [14])) فهو مؤثر خطي يكتب على شكل جداء مؤثرين من نوع هيلبرت شميث، علماً أنه يقال عن مؤثر **S** إنه من نوع هيلبرت شميث إذا كان من أجل أي قاعدة متعامدة نظامية $\{\psi_n\}_{n \in \mathsf{N}}$ في الفضاء H لدينا:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \mathbf{S}\,(\psi_n) \right\|^2 < +\infty$$

في الواقع إن الدالة $\omega_{\beta,\mu}$ تُمثل هنا دالة حالة Function States في الميكانيك الكوانتي وهي دالة خطية منظمة وموجبة معرفة على $C^{*}-$ جبر مختار بشكل مناسب (على النحو الذي شرحناه سابقاً)، وأما دوال الحالة Function States في الميكانيك الإحصائي فإنها توصف من خلال دوال توزيع شرطية تُحقق ما يعرف باسم معادلة دوبرشين– لانفورد– رويل DLR equation (انظر [14] و [15])، ومن ثم فإن البحث في دراسة هذه الحالات سوف يستخدم نظرية الاحتمالات كركن أساس في معرفة خصائص دوال الحالة. لذلك ينطلق المرء في الميكانيك الإحصائي من أن حالة نظام منته أو غير منته يمكن أن يوصف من خلال فضاء احتمالي$[M,\mathbf{M},Q]$ علماً أن M هي مجموعة الأنظمة المنتهية للجسيمات في حين أن $\mathbf{M}$ هو جبر مختار بشكل مناسب، وأخيراً Q هو قياس احتمالي عل الفضاء $[M,\mathbf{M}]$ (للإطلاع على تفاصيل ذلك (انظر [1]، [4]).

الحالات المتوازنة للأنظمة البوزونية

من الحالات الهامة في هذا الصدد ذلك التطبيق الذي يبحث في الحالات المتوازنة للأنظمة البوزونية Equilibrium states of BOSE systems والتي تتمتع جسيماته بخواص عديدة (انظر [1]) ومن أهمها خاصية التناظر المكاني، بمعنى أنه إذا كان لدينا تجمع لجسيمات في نظام، فإنه إذا ما غيرت هذه الجسيمات مواضعها فإن حالة هذه الجملة لا تَتغير على خلاف الأنظمة الفرميونية Fermi systems (منها على سبيل المثال الإلكترونات) والتي تتغير حالتها لدى تبادل كل جسيمين مواضعها.

بالإضافة لذلك يفترض المرء في الميكانيك الإحصائي (ومن أجل الأنظمة البوزونية) أن الجسيمات التي قيد البحث هي جسيمات متماثلة غير قابلة للتمييز بعضها عن البعض الآخر. حيث يمثل كل جسيم وبشكل تام من خلال نقطة في الفضاء الطوري (فضاء تام وفصول يحوي هذه الجسيمات)، فلو أخذنا الفضاء الطوري Phase space هو الفضاء الإقليدي R^{2d} مع $d \in \mathsf{N}$ (وهي أهم

الحالات التي تدرس في الفيزياء)، عندئذ تفسر نقطة $(x,p) \in R^{2d}$ من هذا الفضاء الطوري على أنها الموضع $x \in R^d$ Position للجسيم ودفعه $p \in R^d$، ومن أجل الحالات المتوازنة (تلك الحالات الموافقة لقانون جيبس الكبير Canonical GIBBS low) دوال توزيع الموضع ودوال الدفع مستقلة بعضها عن البعض الآخر، وأكثر من ذلك سيكون توزيع دالة الدفع هو توزيع ماكسويل، ولذلك يهتم المرء بتعيين دالة توزيع الموضع Distribution function position لدى وصفه لحالات متوازنة من أنظمة الجسيمات.

في الواقع إن دراسة نظام الجسيمات في كامل الفضاء الطوري يعد مسألة شاقة وعسيرة لذلك يهتم المرء بمعرفة سلوك نظام (قد يكون منته أو غير منته) في حيز محدود $\Lambda \subseteq R^d$ على أن يكون سلوك باقي الجسيمات خارج الحيز Λ معلوماً، وهذا يعني أنه يمكن للمرء أن يبين أن دوال توزيع الموضع الشرطية تُحقق ما يسمى بـ معادلات دوبرشين – لانفورد – رويل DLR-equations. إن فكرة دوبرشين– لانفورد– رويل تنص على أنه في حال وجود قدرة كامنة Potential فإن قانون توزيع أنظمة الجسيمات (والتي تمثل بنقاط عشوائية في R^d) يأخذ بحيث تكون التوزيعات الشرطية Conditional distributions محققة لمعادلات دوبرشين– لانفورد– ويل، وهذه الأنظمة تُسمى أنظمة جيبس GIBBS- systems، ولقد تبين أن أنظمة جيبس هي تلك الأنظمة التي تَشْغل الحالات المتوازنة Equilibrium systems (انظر[1] و[3]) نفسها.

لقد أثبت كل من ماتيس– فارموث– ميكي MATTHES- WARMUTH – MECKE أن الحالات المتوازنة الموصوفة سابقاً متطابقة مع وجود كثافات شرطية $\Gamma_Q(x,\varphi)$ لطوري نقطة Q Point processes له شكل خاص، في حين أن φ هو قياس عدي Count measure يمثل أسرة جسيمات في الفضاء الطوري.

والآن بالعودة إلى الميكانيك الكوانتي، فلقد ذكرنا أن دالّة الحالة لنظام من الجسيمات (منته أم غير منته) هو دالة خطية منظمة موجبة معرفة

على C^*- جبر مختار بشكل مناسب، وأما في الميكانيك الإحصائي فإن الجبور الموضعية Local algebra، والتي تتكون عادة من القياسات التي تؤخذ ضمن حيز محدود $\Lambda \subseteq \mathsf{R}^d$ تكون إيزومورفية لجبر المؤثرات الخطية المحدودة على فضاء فوك Fock space فوق Λ (للإطلاع على مفهوم فضاء فوك يمكن الرجوع إلى [5]).

بهذا أنهي عملي هذا آملاً أن أكون قد قدمت ما هو مفيد، والله ولي التوفيق.

الملخص:

لقد قمت في البداية بتقديم أهم التعاريف اللازمة لبناء هذا العمل مبتدأً ذلك بتعريف الفضاء الخطي، ومن ثم تعريف الفضاء الخطي المنظم ، وبعد ذلك تقديم تعريف فضاء باناخ، ولتقديم مفهوم فضاء هيلبرت كان لا بد من تقديم تعريف الجداء الداخلي، ثم تلى ذلك النشر في فضاء هلبرت، ثـم الداليّات الخطية والمؤثرات الخطية وأخيراً مفهوم الجبر.

بعد ذلك قدمت مفهوم جبر باناخ والالتفاف ، ومن ثـم تعريـف الجبـر مـن النـوع C* C^*-**algebra** ، ومن النتائج الهامة في هذا الصدد أذكر أنه من أجل C^*- **جبر** A سيكون لدينا:

1- التطبيق الآتي $(\bullet): A \times A \longrightarrow A \quad ; (a,b) \mapsto ab$ مستمراً.

2- الالتفاف أيزومترياً.

3- لدينا: $\| a \| = \sup\limits_{\substack{x\in A \\ \|x\|\le 1}} \| a x \| = \sup\limits_{\substack{x\in A \\ \|x\|\le 1}} \| x a \|$

4- إذا كان في A عنصر وحدة **e** فإنه سيكون لدينا $\mathbf{e} = \mathbf{e}^*$.

بعد ذلك قدمت مفهوم الطيف لعنصر من جبر باناخ والذي رمز له بـ ـ $\mathbf{sp}_A\ (x)$ ، ومـن ثـم تعريف نصف قطر الطيف لعنصر والذي سنرمز له بـ $\mathbf{R}(x)$. في هذا الصدد ولدى A جبـر باناخ مع عنصر وحدة **e**، فإن مجموعة من النتائج الآتية قد ذكرت:

١- ليكن A جبر باناخ و $x \in A$ عنصراً ما، فعندئذ سيكون $\mathbf{sp}_A\ (x)$ هو مجموعة غيـر خالية جزئية ومترصة من C .

٢- ليكن A جبر باناخ يملك عنصر وحدة، و x عنصراً من هذا الجبر A عندئذ:

1- إذا كان **p** كثير حدود فإن:

$$\mathbf{sp}_A\ (\mathbf{p}(x)) = \left\{ \mathbf{p}(\lambda) \quad ; \lambda \in \mathbf{sp}_A\ (x) \right\}$$

2- إذا كان $\theta \notin \mathbf{sp}_A\ (x)$ فعندئذ سيكون لدينا:

$$\mathbf{sp}_A\ (x^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} \quad ; \lambda \in \mathbf{sp}_A\ (x) \right\}$$

٣- إذا كان A هو C^*- **جبر** عندئذ سيكون ما يلي محققاً:

1- لدينا $\mathbf{sp}_A\ (x) = \overline{\mathbf{sp}_A\ (x^*)}$.

٢- إذا كان u واحدياً فإنه سيكون $|\lambda| = 1$ من أجل كل $\lambda \in \mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(u)$.

٣- إذا كان x مرافق لنفسه فإن $\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x)$ سيكون حقيقياً.

٤- إذا كان A هو C^*- **جبر** عندئذ سيكون ما يلي: $\mathbf{R}(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}}$

٥- إذا كان A جبر باناخ و $\mathsf{B} \subseteq \mathsf{A}$ جبر جزئي مغلق ويحوي عنصر الوحـدة للجبـر A عندئذ سيكون لدينا ما يلي محقّقاً:

$$\partial \mathbf{sp}_{\mathsf{B}}(x) \subseteq \mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x) \subseteq \mathbf{sp}_{\mathsf{B}}(x)$$

ومن ثم سينتج أنه من أجل $x \in \mathsf{B}$ سيكون لدينا $\mathbf{R}_{\mathsf{B}}(x) = \mathbf{R}_{\mathsf{A}}(x)$.

وكذلك إذا كان $x \in \mathsf{B}$ و $\mathbf{sp}_{\mathsf{B}}(x)$ له داخلية خالية، فعندئذ سيكون:

$$\mathbf{sp}_{\mathsf{B}}(x) = \mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x)$$

وأخيراً قمت بتقديم أحد أهم التطبيقات في الميكانيك الإحصائي Statistical Mechanics والمتمثلة بدراسة الحالات المتوازنة في الميكانيك الإحصائي اعتماداً على المفهوم الجبري، حيث يحاول المرء هذه الطريقة إظهار الصفات المميزة ويصنف الحالات المتوازنة للأنظمة غير المنتهية على أنّها دوال حالة معرفة على C^*- **جبر** مختار بشكل مناسب، وعناصر الـ C^*- **جبر** هنا تمثل الملحوظات الكيناميتية (الحركية) للجسيمات، وفي هذا الخصوص تلعب دوال الحالة دوراً محورياً، ومن أشهرها تلك الحالات التي توافق الحالات المتوازنة Equilibrium States لأنظمة الجسيمات التي يعبر عنها بقانون جيبس الكبير والمنطلق من H فضاء هيلبرت لدوال الحالة لكل الطاقات الممكنة وكل أعداد الجسيمات لنظام منته، وبأخذ **H** مؤثراً هاملتونيا مترافق ذاتياً وكذلك **N** مؤثراً عددياً هاملتونياً عندئذ دالة الحالة المتوازنة (قانون جيبس الكبير) يعرف كدالة $\omega_{\beta,\mu}$ فوق $\mathbf{B}(\mathsf{H})$ فضاء المؤثرات الخطية المحدودة على H من خلال العلاقة الآتية:

$$\omega_{\beta,\mu}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{tr}_{\mathsf{H}}\left(e^{-\beta \mathbf{K}}\mathbf{A}\right)}{\mathbf{tr}_{\mathsf{H}}\left(e^{-\beta \mathbf{K}}\right)}$$

علماً أن $\mathbf{K} = \mathbf{H} - \mu \mathbf{N}$ مع $\beta, \mu \in \mathsf{R}$ وبحيث يكون $e^{-\beta \mathbf{K}}$ مؤثراً من نوع صف الأثر، وأما **H** فهو مؤثر نصف محدود من الأدنى، وتكون خاصية صف الأثر له صحيحة من أجل قيم $\beta > 0$ فقط.

Abstract

In this work, I introduced the most important definitions which are necessary to construct this project with the definitions: linear space - normed linear space - Banach space- scalar product - concept of Helbert space - the diffusion in Helbert space - linear functions - linear operators and finally the concept of algebra.

After that , I introduced the concept of Banach algebra and involution ,then the definition of C*- algebra ,and some of the important results to be mentioned that for a C*- algebra A and we will have:

1- the following map is continuous:

$$(\bullet): \mathsf{A} \times \mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{A} \quad ; (a,b) \mapsto ab$$

2-The involution is isometrc.

3- we have :

$$\| a \| = \sup_{\substack{x \in \mathsf{A} \\ \| x \| \le 1}} \| a x \| = \sup_{\substack{x \in \mathsf{A} \\ \| x \| \le 1}} \| x a \|$$

4 - if there is an identity element $\mathbf{e}$ in A so we will have $\mathbf{e} = \mathbf{e}^*$.

Mor than I introduced the spectrum concept for an element from Banach algebra which its symbol is $\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x)$ then the definition of the spectral radius formula which we will give it the symbol $\mathsf{R}(x)$,so when Banach algebra A have an identity element $\mathbf{e}$ then the flowing result will be mentioned :

1- let A a Banach algebra, and $x \in \mathsf{A}$ then $\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x)$ is an unempty compact subset of C .

2- Let A Banach algebra have an identity element and x is an element of this algebra A then :

1- if $\mathbf{p}$ is a polynomial :

$$\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(\mathbf{p}(x)) = \{ \mathbf{p}(\lambda) \quad ; \lambda \in \mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x) \}$$

2- if $\theta \notin \mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x)$ then we will have:

$$\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} \quad ; \lambda \in \mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x) \right\}$$

3- if A is C*- algebra then the following will be true

i- we have $\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x) = \overline{\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x^{*})}$

ii- if u is identity element then $|\lambda| = 1$ for all $\lambda \in \mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(u)$.

iii- if x is a selfadjoint then $\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x)$ is real.

4- if A is C*- algebra then we will have $\mathbf{R}(x) = \lim_{n \to \infty} \left\| x^{n} \right\|^{\frac{1}{n}}$.

5- if A is Banach algebra $\mathsf{B} \subseteq \mathsf{A}$ is closed subalgebra and contains the identity element for A then the following will be true:

$$\partial \mathbf{sp}_{\mathsf{B}}(x) \subseteq \mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x) \subseteq \mathbf{sp}_{\mathsf{B}}(x)$$

and flows that for $x \in \mathsf{B}$ we will have $\mathbf{R}_{\mathsf{B}}(x) = \mathbf{R}_{\mathsf{A}}(x)$.

Also if $x \in \mathsf{B}$ and $\mathbf{sp}_{\mathsf{B}}(x)$ has an empty interior then:

$$\mathbf{sp}_{\mathsf{B}}(x) = \mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x)$$

Finally I introduced one of the most important implications in statistical mechanics which is represented by studying equilibrium states in statistical mechanics by the concept of algebra, where we try to use this way to introduce, the characteristics behavior and classified the equilibrium states for the infinity systems as states functions defined on C*- algebra selected correctly. The element of C*- algebra here represent the marked kinetic of particles. Here the state function play a vital role. One of the most famous states which go with equilibrium states for particles systems which we express them by the low Canonical GIBBS

$$\omega_{\beta,\mu}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{tr}_{\mathsf{H}}(e^{-\beta \mathbf{K}} \mathbf{A})}{\mathbf{tr}_{\mathsf{H}}(e^{-\beta \mathbf{K}})}$$

المراجع

1- AL-OKLAH. H. ; Punktprozesse und Gleichgewic htszustande von Bosonen systemen, Disertation . 1990

2-AL-OKLAH. H. ; Study of the position distribution of ideal Bose-gas by point processes theory Journal of Al-Baath University — Volume 20—3— 1998 (written in Arabic).

3- BRATTELI, 0. & ROBINSON, D.W. ; Operator algebras and quantum statistical mechanics 1--II. SpringerVerlag. NewYork-Heidelberg —Berlin. 1979/ 1981- Second Printing 2002.

4- FICHTNFR. K-H. & FREUDEN BE RG,W ; Characterization of States of Infinite Boson Systems Springer-Verlag - comnnin. Math. Phys. 137,315-357 (1991)

5- Fock, V. ; Konfigurationsraum und zweite Quantelung — ZSF Phys. 1932

6- Garrett, P. ; Hilbert spaces , garrett@math.umn.edu http://www.math.umn.edu 2007.

7- Jan Ilainhalter ; States on Operator Algebras and Axiomatic System of Quantum Theory - PACS. 03.65.Ta, 02.30.Tb. 02.30 Sa — 2004.

8- Kadison R.V. and Ringrose J.R. ; Fundamentals of the theory of operator algebras, Academic Press, New York, 1983.

9- Kadison. R. V. Ringrose J. R ; Fundamentals of the Theory of Operator Algebras (Amer. Math Soc., Providence. RI), Vol. 1 & 2. . (1997).

10- Lanford 0. E. Ruelle D. ; Observables at infinitly and states with short ramt correlations in statistical mechanics — commun. math. Phys. 1969.

11- Lanford O. E. ; The classical mechanics of one Dimensional systems of infinitely many particles — commun. math. Phys. 1968.

12- Lenard A. ; States of classical statistical mechanical systems of infinitely many particles 1+2 Lndiana university 1974.

13- Pedersen G.K. ; C□-algebras and their automorphism groups, Academic Press, London, 1979.

14- PIETSCH. A. ; Eigenvalues and S-Numbers; Akademie-‘erlagsgesel1schafi Geest & Porig K.-G. ; Leipzig 1987.

15- Rordarn M. Stornier E. ; Classification of Nuclear C*Alebras, Entropy in Operator Algebras — Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2002.

16- VaughanF.R. Jones ; Von Neumann Algebras. Supported in part by NSF Grant DMS93 22675. the Marsden fund U0A520, and the Swiss National Science Foundation 2003.

١٧- مبادئ التحليل الدالي تأليف الدكتور إبراهيم إبراهيم والدكتور سامح العرجة ١٩٩٤-١٩٩٥